ELEMENTA
MATHEMATICA

P. F. FORTUNATI
A BRIXIA

*Ord. Min. Ref. Prov. Brixiæ Lect. Theol. Scriptoris Ord.
& in Brixiana Academia Publ. Matheseos
& naturalis Philos. Professoris*

ELEMENTA MATHEMATICA

*IN QUATUOR TOMOS
DIGESTA.*

TOMUS PRIMUS

Algebræ Synopsim, generalem proportionum doctrinam, ac utriusque progressionis theoriam, & praxim continens.

BRIXIÆ. CIƆIƆCCXXXVIII.
Typis JOANNIS-MARIÆ RIZZARDI.
SUPERIORUM FACULTATE.

ILLUSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO
ANTONIO
MOCENICO
EQUITI &c.

F. FORTUNATUS A BRIXIA
MIN. REFOR.
F.

EDimus opus hoc Tuis *ſub auſpiciis*, *EQUES AMPLISSIME*, *illud aſſecuti*, *de quo magnopere*, *cum aliquid vulgatur*, *laborari ſolet*; *ſcilicet Mœcenatem optimum*, & *ſingularem*. *Hac quidem in parte ſatis ſuper*-

que

que contenti, unum tamen dolemus, floridum illud dicendi genus desiderari, quod ad laudes alienas rite persequendas aptum, hic tempestivum & peropportunum esset. Nam tunc per omnes MOCENICI *stemmatis ramos libere discurrens, ultra quinque Venetiarum Duces ostenderem; cæterosque Viros toga sagoque præclaros, partim terrestri, partim maritimo functos imperio percensens, ad Te descenderem, generosum pariter & nobilem, Legatum olim Lutetiam Parisiorum missum, nunc qui Neapolis Reginæ, per Venetæ ditionis loca transituræ, occurras, dignum judicatum: hinc Patriam caram vobis, vos Patriæ caros semper extitisse monstrarem. Sed utcunque sit, ea saltem juvabit indicasse, quæ Brixianorum mentibus alte reposita manent atque æternum manebunt: Te caste & integre eorum provinciam administrando, illud Isocra-*

tis

tis ad Demonicum servasse : A publicis functionibus discede, non locupletior, sed laudatior: *Te, exteris armis obstrepentibus circum, tuo consilio id præstitisse, quod temporum difficultas vix pati posse videretur* : *Te* EMINENTISSIMO PRINCIPI ANGELO MARIÆ CARDINALI QUIRINO, *qui jam totus est in perducendo ad summum novo immensi operis Templo, largo subsidio fuisse, ita ut Te in magna tabula, hoc ipsum innuente, descriptum ipse in Episcopali pinacotheca ponendum curaverit. Addam postremo, Te, ejusdem amicitia & consuetudine, quoad publica utrinque negotia paterentur, delectatum [quod non ultimum Tuæ probitatis ac morum integritatis argumentum erat omnibus] & singularibus dotibus captum, par, quod ajunt, pari retulisse, publicam nimirum aulam effigie, illum simulante, condecorando. Hæc sunt, quæ rudi*

rudi Minerva delibare placuit , ut quicunque nostra hæc in manus sument , videant , quam bene sit mihi de Patrono consultum . Tu interim, EQUES *AM*PLISSIME, *ne dedigneris obsecro, quæ damus , æquo animo accipere . Profecto hinc ad tot tantaque beneficia , quæ in me, meumque hujus Provinciæ Ordinem contulisti , maximus cumulus accedet . Vale.*

Brixiæ IV.*Idus Aprilis* CIϽ IϽ CC XXXVIII.

LE-

LECTORI BENEVOLO.

NE mireris, Benigne Lector, si post eximia & plane aurea hac ipsa de re edita volumina, meum hoc nulla dote spectabile, innumerisque potius criminationibus impetendum, in lucem prodire audeat. Ingenue fatear, quid me impulerit, ut illud conscriberem, & nunc publici juris faciam. Cum enim exemplaria pene omnia *Elementorum Geometricorum*, quæ exiguo volumine comprehensa, quatuor ab hinc annis in lucem edidi, distracta essent, nec ullum amplius studiosæ juventutis commodo prostaret, in eam Typographus sententiam venit, ut iterum typis illa committeret. Rogavit propterea, ut opusculo manus iterum admoverem, eique, si mihi visum esset, nonnulla adjicerem, quæ Tyronibus forent non inutilia. Quam porro gratum id mihi acciderit, dissimulare nequeo, cum Mathematicas facultates, si quis alius, deperеam. Rem itaque lubenti animo aggressus, cum in primis animadverterim, quam necessaria iis omnibus sit, qui naturalis Philosophiæ studio nunc temporis operam navare parant, aliqua saltem *Arithmeticæ speciosæ* cognitio, hujus synopsim conscripsi. Ut

 vero

vero illius pateret usus, generalem *proportionum* doctrinam, utpote in universa Mathesi permaxime utilem ac necessariam, simulque utriusque *progressionis* theoriam, & praxim illustrandam suscepi. At cum cernerem, incœptum opus in majorem, quam ab initio mente conceperam, molem excrescere, rem non inutilem me facturum putavi, si *Geometriæ* quoque elementa, eadem, qua *proportionum*, atque *progressionum* theoriam absolveram, methodo pertractanda susciperem. Etsi enim hujusce argumenti plura a pluribus præclare jam conscripta esse conspicerem, nemo tamen inficiari mihi posse videbatur, omnia fere eximia ejusmodi opera subtilioribus speculationibus, concisisque demonstrationibus adeo esse referta, ut Tyronum, cetera constantem, animum sæpe ad desperationem perducant. Accedit, non omnes, neque una tantum de caussa, volumina ipsa sibi comparare posse: quo fit propterea, ut non pauci, qui Mathesi eximiam operam darent, eam omnino negligere vel inviti cogantur. *Neque enim omnia, quæ ab omnibus conscribuntur, in omnium manus veniunt; & fieri potest, ut nonnulli, qui etiam hæc nostra intelligere valent, illos pleniores non inveniant libros;* atque adeo utile plu-

rimum

rimum esse, *plures a pluribus fieri diverso stylo, non diversa fide, etiam de quæstionibus iisdem, ut ad plurimos res ipsa perveniat, ad alios sic, ad alios autem sic* (a). En igitur non tantum ratio scribendi, verum etiam caussa, ut quæ conscripta a me fuerant, qualiacunque ea sint, prælo committerem. Restat, ut paucis dicam, quid in hisce Elementis adornandis præstiterim. Equidem in primis ea ex Euclide, Archimede, Pappo, aliisque præstantissimis Mathematicis elementa excerpsi, quæ communi maximorum Virorum sententia magis utilia, scituque necessaria censentur. Hisce autem singulis loca in margine adjeci, in quibus ab eximiis illis Viris ea ipsa traduntur; eo nimirum consilio ductus, ut quæ ex iisdem passim citantur, etiam in hoc opere inveniri facile possint. Tyronum porro commodo consulens, in quatuor tomos totum opus distribui, atque ea methodo in singulis elementa digessi, quæ magis naturalis mihi visa est, & captui aptior. In demonstrationibus malui esse aliquanto prolixior, quam cum obscuritatis periculo brevior. Eas vero, quæ ad absurdum deducunt, quo fieri a me potuit, vitavi, illud pro certo habens,

(a) S. August. lib. 1. *de Trinit.* cap. 3.

demonſtrationes hujusmodi aſſenſum quidem noſtrum extorquere, non autem intellectum illuſtrare; qui ſcientiarum finis præcipuus eſſe debet. In hiſce demum omnibus cautum ſummopere curatumque a me eſt, ut perſpicuitas potius, quam elegantia locum haberet. Quippe, ut ait Tullius, *omne quod de re bona dilucide dicitur, mihi præclare dici videtur; iſtiusmodi autem res dicere ornate velle, puerile eſt; plane autem & perſpicue expedire poſſe, docti, & intelligentis viri* (a). Atque hæc quidem ſunt, quæ de hujus operis conſilio ac methodo mihi dicenda videbantur. *Omnibus autem his editis, liceat unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare* (b). Si quid peccatum a me fuerit, te Lector Benevole obteſtor, ut qua benignitate es, aut ignoſcas, aut emendes, eo doctus Quintiliani præcepto, nec ea, quæ magni Autores dixerint, eſſe perfecta. *Summi enim ſunt, homines tamen* (c). Vale.

A P-

(a) Lib. III. *de Finibus* cap. 5.
(b) Apollonius Pergæus *epiſt. ad Eudemum.*
(c) Lib. X. *Inſtitut. Orator.* cap. 1.

APPROBATIONES.

NOs infrascripti Lectores Theologi, nutibus obsequentes Reverendissimi Patris Petri Pauli a Cirignola V.Comis. Generalis hujus Cismontanæ Reformatæ Familiæ, vidimus opus, cui titulus est: *Elementorum Mathematicorum Tomus I. auctore R. P. Fortunato a Brixia hujus Reformatæ Provinciæ Brixiensis Lect. Theologo, Publ. Matheseos Professore, ac Scriptore Ordinis*, nihilque in eo deprehendimus, quod Catholicæ Fidei, probisque moribus vel minimum adversetur. Quamobrem illud dignum censemus, ut publici juris fiat, si ita videbitur &c. In quorum fidem &c.

Brixiæ die 1. Octobris 1737.

F. Prosper a Brixia S. Theol. Lector.

F. Joannes Baptista a Brixia Lector Theologus.

F. PETRUS PAULUS A CIRIGNOLA Stric. Observ. S. P. N. Francisci Lector Emeritus, Ex-Provincialis, olim Proc. Generalis, & in hac Cismontana Reformatorum Familia Vic. Comissarius Generalis, & Servus.

CUm a duobus Patribus Theologis revisum de ordine nostro & approbatum fuerit opus, cujus titulus est: *Elementa Mathematica in quatuor Tomos digesta. Tomus* I. ab Admod. Ven. P. F. Fortunato a Brixia nostræ Reformatæ Provinciæ Brixiæ Concion. Lect. Theolog. compositum, vigore præsentium facultatem eidem tribuimus, quatenus servatis servandis, illud typis mandare possit, & valeat.

Dat. Romæ ex nostro Conventu S. Francisci ad Ripas die 12. Octobris 1737.

F. Petrus Paulus a Cirignola V. Com. Gen.

Loco ✠ Sigilli

Reg. *De mandato P. Suæ Reverendissimæ*
F. Bernardinus a S. Quirico Pro-Secret. Generalis.

NOI

NOI RIFORMATORI

DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del P.F.Tomaso Maria de Angelis Inquisitore di Brescia, nel Libro intitolato: *Elementa Mathematica in quatuor Tomos digesta. Tomus primus*: non v'esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza à Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Brescia, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe; e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. 20. Genarò 1737.

(*Gio: Francesco Morosini Kav. Ref.*

(

(*Pietro Grimani Proc. Ref.*

Agostino Gadaldini Segretario.

IN-

INDEX LIBRORUM QUI IN HOC PRIMO TOMO CONTINENTUR.

ALGEBRÆ, sive ARITHMETICÆ SPECIOSÆ SYNOPSIS.

Typo-

Typographiæ ſphalmata, quæ irrepſere, ipſo in limine attexere opportunum duxi, ut ſcilicet in ea Lector benevolus incidens, emendanda eſſe prægnoſcat.

Synopſis Algebræ.

SPHALMATA	CORRIGE
§. 11. lin. 5. intra ſe	inter ſe
§. 90. lin. 9. $b+d-e$	$-b+d-e$
§. 107. lin. 5. denominatoris 4.	denominatoris 3.
§. 116. Exemp. I. lin. 1. $\frac{a}{a}$	$\frac{a}{b}$
§. 132. lin. 4. fractionem prima	fractionem primam
§. 207. lin. 11. multiplicetur per $\sqrt{dm}$	multiplicetur per dm
§. 238. Problem. *Quantitates rationales*	*Quantitates irrationales*
§. 242. *Laterculum*	*Exemplum.*
§. 248. lin. 3. $a^{\frac{3}{2}}+3ab^{\frac{1}{2}}+ba^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}$	$a^{\frac{3}{2}}+3ab^{\frac{1}{2}}+3ba^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}$
§. 269 $a-c>a-d$	$a-c>b-d$.

Elementorum Liber I.

SPHALMATA	CORRIGE.
§. 58. lin. 6. *duplica, ta* erit	*duplicata* erit
§. 73. lin. 4. demonſtratur, prima	demonſtratur prima
§. 142. lin. 5. $Ab\times\overline{B-b}$	$A\times\overline{B-b}$
§. 167. lin. 1. Raitonum	Rationum

PRO-

PROLEGOMENA
IN
ELEMENTA MATHESEOS.

DE ortu & progressu Matheseos pauca hic præmittimus. Plura qui cupit, aut *Historiam Mathematicam* adeat Petri Rami, aut *Tractatum de Mathematicarum scientiarum progressu, illustrioribusque Mathematicis* P. De-Chales, ejus cursui Mathematico in posteriori Lugdunensi editione præfixum, aut demum *Brevem Commentationem* Cl. Volfii, quæ Tomo IV. sui cursus ad calcem legitur.

I.

M*Athesis* nomine ea facultas intelligitur, quæ *circa quantitatem* abstractive *sumtam tota versatur*. *Mathesis* Græce dicta est, quod *doctrinam*, *disciplinam*, sive *scientiam* Latine significat, quatenus nempe tanta est eorum, quæ in Mathesi traduntur, evidentia, tanta certitudo atque firmitas, ut *scientiæ* nomen illi præ ceteris conveniat. Duæ porro sunt *Matheseos* partes præcipuæ, *Arithmetica*, & *Geometria*, quemadmodum duæ sunt species quantitatis, *discreta*, & *continua*.

I I.

Arithmetica est *scientia theoretico-practica de quantitate discreta, sive de numeris*. Illius inventio Phœnicibus a plerisque tribuitur, viro autem sapientissimo Theut Ægyptio, qui Thami Ægyptiorum Regis tempore floruit, a Platone in Phædro, dum ait: *hunc primum omnium numerum, & numeri computationem invenisse*. Verum, cum ex Josepho (a), numerorum, atque siderum scientiam Ægyptii ab Abrahamo didicerint, quarum disciplinarum antea rudes erant, probabilior videtur eorum opinio, qui putant, Assyrios atque Chaldæos primos fuisse post diluvium, qui Mathematicis scientiis operam dederint, atque ex illis ad Ægyptios, autore Abrahamo, hujusmodi facultates delatas esse; ob id vero Arithmeticæ inventionem Phœnicibus acceptam referri, quod illi propter mercaturam, cui quammaxime dediti erant, Arithmeticam impensius coluerint.

I I I.

Geometria est *scientia theoretico-practica de quantitate continua permanenti finita*, hoc est *de lineis, superficiebus, & solidis, prout terminata sunt, & a materia sensibili praescindunt*. Hæc ab Ægyptiis primo inventa fuisse traditur, quatenus, ut ex Herodoto, Strabone, aliisque habemus, cum Nilus anniversaria exundatione agrorum fines confunderet, eosque limo operiret, necesse illis fuit, ut artem invenirent, qua iterum agri dividerentur, quodque suum erat, cuique redderetur. *Geometria* idcirco hæc facultas dicta est, a terræ nimirum dimensione, ut fert ipsum nomen, ob quam primo fuerat inventa, quamvis si, prout nunc traditur, spectetur, ejusque adæquati objecti ratio habeatur, *Megethometria* nomen, ut notat Cl. Sturmius, illi proprie conveniat. Sed cuinam Ægyptiorum primordia Geometriæ sint adscribenda, res plane incerta est. Plato in Phœdro, ut Arithmeticæ,

(a) Lib.I. Antiquitatum cap. 9.

ticæ, ita Geometriæ Theut Ægyptium inventorem facit. Alii vero Mœridi, qui ex Herodoto pyramides altiſſimas excitavit, hoc eximium inventum tribuunt, teſtante Laertio ex Anticlide, Pythagoram *Geometriam perfeciſſe, cum antea Mœris initia elementorum ejus invenerit* (a). At probabilius puto, Geometriæ quoque prima rudimenta Ægyptios a Chaldæis per Abrahamum accepiſſe, quamvis poſtea Ægyptii in Geometria, aliiſque Matheſeos partibus impenſam operam collocaverint, atque in illis adeo floruerint, ut non Geometriæ tantum, verum etiam Arithmeticæ, aliarumque Mathematicarum ſcientiarum primordia ipſis deinceps tribuerentur.

I V.

Ut ut res ipſa ſit, compertum eſt, Mathemata ab Ægyptiis ad Græcos, trajecto mari, delata fuiſſe. Thales Mileſius primus fuit Græcorum, qui Geometriam, quam in Ægypto didicerat, ad Græcos traduxerit; unde dicitur ab Apuleio *Geometriæ penes Grajos primus inventor*. Ei debentur propoſitiones 5, 15, 26 Libri I. *elementorum* Euclidis, ſicuti etiam 2, 3, 4, & 5 Libri IV, aliaque plura eximia inventa, quæ a Laertio, & Apuleio memorantur. Floruit autem Thales ſeculo VI. ante Chriſtum, ipſumque ſecutus eſt Pythagoras Samius ſub fine ejuſdem VI. ſeculi, & initio V. ante Chriſtum in Italia celeberrimus. Is autor fuiſſe dicitur quinque corporum regularium, quæ *Platonica* vocari ſolent, nec non magnitudinum *incommenſurabilium*. Invenit propoſitiones 32, 44, 47, & 48 Lib. I. Refert autem Apollodorus apud Laertium, *hecatomben* (bovem) *Pythagoram immolaſſe, cum inveniſſet trianguli rectanguli ſubjectum recto angulo latus tantumdem valere, quantum, quæ illum continerent*. In Arithmetica quoque maxime enituit, tantuſque illius fuit in eam amor, ut *ſecundum numerum* generari omnia autumaverit. Thaletem atque Pythagoram æmulati ſunt Anaximander Mileſius, qui Geometriam compendio pertractaſſe fertur: Anaxagoras, qui de circuli dimenſione differuit: Oenopides Chius, cui a Proclo

(a) Lib. VIII.

propositiones 12, & 23 Lib. I, tribuuntur: Zenodorus autor tractatus de figuris *isoperimetris*: Hippocrates itidem Chius, qui cubi duplicationem per duas medias proportionales tentavit, omniumque primus, si eidem Proclo credimus, Geometriæ elementa ab aliis inventa collegit: Divinus Plato, cujus quantus fuerit in Mathesim ardor, quantoque studio eam coluerit, illa Academiæ foribus inscripta epigraphe: *Nullus Geometriæ expers accedat*, luculenter ostendit: Aristoteles Stagirita, qui in Mathesi quantum versatus fuerit, manifeste evincunt asserta, illa, quibus referta ubique sunt ipsius opera: Eudoxus Gnidius, cui totus liber V. ex Græco Scholiaste debemus: Menechmus Eudoxi auditor, qui sectiones *conicas*, invenit; Hypsicles Alexandrinus, qui autor dicitur lib. XIV, & XV. *elementorum Euclidis*: Serenus Antinsensis, qui duos composuit libros de *sectione cylindri*, *& coni*. Menelaus, cui libri VI. de *subtensis* in circulo, & libri III. de *triangulis sphæricis* tribuuntur. Geminus, qui de *spiralibus*, *concoidibus*, & *cissoidibus* disseruit, atque tres tantum esse similares lineas ostendidit: Philo, Diocles, Nicomedes, Sporus atque Hero ab Eutocio Ascalonita plurimum commendati; Diophantus Alexandrinus Algebræ, totiusque numericæ subtilitatis autor: Proclus Diadochus, qui seculo V. post Christum pluribus in Philosophia, ac Mathesi scriptis, commentario præsertim in I. Euclidis librum maxime clarus fuit. Theon Alexandrinus, cujus eximia extant in omnes Euclidis libros commentaria, aliique præterea multi, quos omitto, ut ad eos veniam, qui Mathematicorum Principes merito optimoque jure censentur, Euclidem scilicet, Archimedem Siracusanum, Apollonium Pergæum, Theodosium Tripolitam, & Pappum Alexandrinum.

V.

Euclides *suavissimi ingenii vir*, *& contentionis minime amans* (a) floruit, si Proclo credimus, tempore Ptolemæi Lagi Regis Ægypti, sub fine nimirum IV. seculi ante Christum, atque

(a) Pappus Lib. VII. Collect. Mathem.

que Alexandriæ omnium primus Geometriam publice docuit. Incertum plane est, cujus ille patriæ fuerit. Nonnulli ipsum Megaris natum faciunt, unde Megarensem vocant, atque cum illo confundunt, qui Socratis auditor fuit, & Megaricam Philosophorum sectam instituit. Id tamen non videtur verum, tum quia ille integro, vel circiter seculo Euclidem nostrum precessit; tum quia inter Megarensis opera a Laertio enumerata aureum Elementorum volumen minime recensetur: quòd maximo sane argumento est, Euclidem Geometrarum Principem alium esse a Megarensi, quem Laertius commemorat; cum probabile haudquaquam sit, Laertium in veterum Philosophorum monumentis apprime versatum, hoc tam eximium Euclidis Megarensis volumen, si illius esset, ignorasse, vel data opera præterire voluisse. Ceterum utcunque res ipsa sit, de qua viderint alii, Euclides, ut refert Proclus, *elementa collegit, & multa quidem construxit eorum, quæ ab Eudoxo; multa vero perfecit eorum, quæ a Theateto reperta fuerunt. Ea præterea, quæ a prioribus molliore brachio ostensa fuerant, ad eas redegit demonstrationes, quæ nec coargui, nec convinci possunt.* Ex quo manifestum efficitur, quam falsa sit illorum opinio, qui putant, non Euclidis, sed Theonis esse elementa Mathematica, quæ vulgo Euclidi tribuuntur, vel Euclidem propositiones quidem invenisse, sed eas Theonem demonstrasse. Scripsit porro Euclides *Geometriæ elementa*, *Phænomena Astronomica*, *Specularia*, *Optica*, *Data Mathematica*, *Elementares institutiones ad Musicam capessendam*, deque *divisionibus*: quod tamen opus suspicantur nonnulli esse libellum illum de *superficierum divisione* Machometo Bagdedino adscriptum, & a Joanne Dee Londinensi, atque Federico Commandino Urbinate publici juris factum. Scripsit quoque Euclides, Proclo teste, de *conicis* sectionibus, aliaque id genus opuscula, quæ temporum injuria periere. Opus tamen omnium præstantissimum, & nunquam satis commendatum sunt Geometriæ elementa. De his enim loquens Cardanus, *Euclidis*, inquit, *sunt duæ præcipuæ laudes, inconcussa dogmatum firmitas libri elementorum, perfectioque adeo absoluta, ut nullum opus huic jure comparare audeas. Quibus fit, ut adeo veritatis lux in eo refül-*

refulgeat, *ut ii soli in arduis quaestionibus videantur posse verum a falso discernere*, *qui Euclidem habeant familiarem* (a). Hæc XIII. libris deposuit Euclides, quibus postea duo alii, nimirum XIV. & XV, adiecti fuere ab Apollonio Pergæo ex Hypsicle Alexandrino; ac demum XVI. a Francisco Flussate Candalla Nobili Gallo. Horum I. est *de triangulis rectilineis*, *lineis parallelis*, *& parallelogrammis*. II. *de rectarum potentiis*. *rectangulis* nempe, *& quadratis*. III. *de affectionibus circuli* IV. *de inscriptione figurarum planarum regularium in circulo*, *earumque circulo circumscriptione*. V. *de proportione magnitudinum in genere*. VI. *de ratione*, *& similitudine planorum rectilineorum*, VII. VIII., & IX. *de numeris*. X. *de magnitudinibus incommensurabilibus*. XI. XII., XIII. &c. de *solidis*.

V I.

Archimedes Siracusanus, quem Cicero *Deum terrenum*, *& divino ingenio instructum* appellat (b), claruit seculo III. ante Christum. Is, *uti aliis in scientiis*, *& in praxibus Mathematicis*, *ita & in Mechanicis summus fuit* (c). Scripsit de *sphæra*, *& cylindro*, seu de horum corporum dimensione tam penes superficiem, quam penes soliditatem, de *dimensione circuli*, *& parabolæ*, *de conoidibus*, & *sphæroidibus*, de *lineis spiralibus*, aliaque plura eximia opuscula, quæ omnia præclaro in opere (*) nuper edito recenset pereruditus, ac Nobilis Vir Co. Joannes Maria Mazzuchellus Brixianus. Seculo II. ante Christum floruit Apollonius ex Perge Pamphiliæ urbe, quam patriam habuit, Pergæus dictus. Autor is fuit VII. librorum de *sectionibus* conicis; quam quidem doctrinam cum omnium primus universalissimam reddiderit, *Magni Geometræ* cognomen, egregiæ laudis encomio, adeptus est. Theodosius Tripolita floruit circa medium sæculi I. ante Christum. Huic debentur libri III. *sphæricorum*, ex quibus omnia Geographiæ prin-

(a) Lib. XVI. de *subtilitate*.
(b) Lib. I. Tuscul. qq.
(c) Scottus *Magia univer*. P. III. lib. I. In proemio.
(*) Notizie Istoriche, e Critiche intorno alla vita, alle invenzioni, & agli scritti di Archimede Siracusano. Brixiæ 1737.

principia facile demonſtrantur. Pappus demum Alexandrinus, quamvis inter Veteres Mathematicos fere poſtremus, utpote qui claruit poſt Chriſtum natum ſeculo IV, ſi eximiam tamen illius doctrinam ſpectes, primis adnumerandus, *Mathematicas Collectiones* edidit libris VIII. comprehenſas, ex quibus tamen duo priores adhuc deſiderantur. Sex, qui habentur libri, tam *multis abundant, tamque variis*, inquit Tacquetus, *ex omni prope Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima, quæ extant, veterum monumenta ab omnibus cenſeantur*. Hæc de Matheſeos origine, atque progreſſu apud veteres, qui eam illuſtrarunt. Silentio enim prætereundos eſſe Recentiores eo duxi conſilio, ne prope infinitam Scriptorum, quibus permultum debet hujuſmodi diſciplina, hiſtoriam prætexerem.

METHODUS MATHEMATICA.

Methodus, quam in ſuis tradendis dogmatis adhibent Mathematici, tribus hiſce regulis tota innititur. I. *ut a generalioribus, ac ſimplicioribus ſumto initio, ad minus generalia, magiſque compoſita progreſſus fiat*. II. *ut nihil in terminis obſcurum, nihil ambiguum relinquatur*. III. *ut omnes propoſitiones, quarum veritas ſola terminorum perceptione evidenter non conſtat, ope definitionum præmiſſarum, axiomatum conceſſorum, ac propoſitionum demonſtratarum oſtendantur*. Hinc ſuas Mathematici diſſertationes ordiuntur a *definitionibus terminorum*, quibus *axiomata*, & *poſtulata*, quæ uſui ſunt ad demonſtrationes conficiendas, ſubiiciunt. His ſuccedunt *lemmata*, tum *theoremata*, & *problemata*, atque horum ſingulis ſua annectuntur *corollaria*, & *ſcholia*.

DEFINITIONES.

Definitionibus explicantur termini, quorum notio latet. Hę *nominales* ut plurimum ſunt, hujuſmodi nempe, ut quid tali vocabulo intelligendum ſit, in aperto ponant. Aliquæ etiam modum, quo res ipſa fit, vel fieri poteſt, exponunt; unde *geneticę* vocantur.

AXIO-

AXIOMATA.

Axiomata sunt propositiones quædam generales theoreticæ quarum veritas sola terminorum perceptione menti occurrit. Hinc *propositiones per se notæ*, & *communes notiones* vocari etiam solent, quatenus nempe demonstratione non indigent, earumque veritas cuique obvia est, qui terminos noverit.

POSTULATA.

Postulata sunt propositiones quędam practicę itidem cuique notæ. *Postulatum quidem*, inquit Proclus, *tamquam factu facile sumitur. Axioma vero tamquam cognitu facile communi omnium consensu conceditur.*

LEMMA.

Lemma est propositio, quæ, cum aliis principalioribus demonstrandis inserviat, neque commode citari possit, propositionibus ipsis principalioribus præmittitur, & demonstratur.

THEOREMA.

Theorema est propositio theoretica, quæ ex definitionibus, axiomatis, vel propositionibus antea demonstratis ostenditur.

PROBLEMA.

Problema est propositio practica, qua nimirum aliquid faciendum proponitur. *Propositiones*, inquit P. Christophorus Griembergerus in suo Euclide ante prop. I., *vel sunt theoremata, vel problemata. Illa versantur circa quantitatem abstractam speculative, ista practice; quia habent pro fine aliquod opus intellectuale circa eandem quantitatem abstractam. Et ita sumtæ propositiones sunt proprie Mathematicæ, & pure Geometricæ. Ad theoremata revocantur pronunciata, ad problemata postulata.*

COROLLARIUM.

Corollarium est propositio theoretica, vel practica, quæ cum ex alia immediata illatione inferatur, illi veluti consectarium subiicitur.

SCHOLIA.

In *scholiis* demum, quæ propositionibus subiiciuntur, obscura, & dubia, si quæ in illis occurrunt, explanantur, doctrinæ usus indicatur, quæque eruditionem sapiunt, scituque jucunda sunt, attinguntur.

ALGEB-

ALGEBRÆ
ſive
ARITHMETICÆ SPECIOSÆ
SYNOPSIS.

Ut claritati conſulerem, quæ in hac præſertim Matheſeos parte quammaxime optanda eſt, factu optimum duxi, Synopſim in plures Sectiones dividere.

SECTIO I.

Algebræ natura, atque nonnulla ad eam ſpectantia expenduntur.

DEFINITIO I.

1 *Algebra*, ſive *Arithmetica ſpecioſa*, & *Logiſtica ſimbolica eſt ars, quæ in calculo magnitudinum indeterminatarum tota verſatur*. *Algebræ* nomen Arabicum eſt, ab *Al'giabr*, quod *artem reſtituendi*, ſeu *reintegrandi* ſignificat, derivatum. Eſt enim hujuſce facultatis munus præcipuum, ut, poſtquam ignota quantitas ſic fuerit per varias operationes deformata, ut cognitæ quantitati æqualis prodierit, illius valor, facta reintegratione, innoteſcat. Ob id vero *Arithmetica ſpecioſa*, & *Logiſtica ſimbolica* vocatur, quod omnes operationes Logiſticæ ope literarum Alphabeti in ea abſolvantur. Triplicem porro ob cauſam Alphabeti literæ cyphris numericis, quæ in vulgari Arithmetica adhibentur, ſubſtitutæ ſunt. *Primo*: quia cyphræ illæ quantitatem diſcretam, eamque certam, determinatam, & cognitam dumtaxat ſignificant. Contra vero literæ Alphabeti magnitudinem generatim ſum-

tam, prout nempe quantitatem tum discretam, tum continuam, motum, tempus, corporum vires, momenta, & resistentias sub se continet; & illam quidem non modo cognitam, & determinatam, verum etiam indeterminatam, & plane incognitam ex æquo designant, & exprimunt. *Secundo*: quia in quovis producto literis expresso omnia, & singula elementa, quibus constat, distincte nobis occurrunt, secus ac in iis contingat, quæ ex numeralium cyphrarum multiplicatione producuntur. *Postremo*: quia Algebricæ demonstrationes hoc ipso generales sunt, hujusmodi nempe, ut omnes particulares casus contineant; cum e contrario, quæ notis numericis fiunt, singularem dumtaxat casum complectantur. Franciscus Vieta omnium primus Alphabeticis literis usus est. Hariottus vero, & ipsum secutus Cartesius majoribus literis minores substituere.

DEFINITIO II.

2 *Magnitudo Algebrica vocatur illa, quæ Alphabeti literis exprimitur*. Hæc autem duplex est, *positiva*, & *negativa*.

DEFINITIO III.

3 *Magnitudo Algebrica* positiva *ea est, quæ citra nihilum reperitur, quæque propterea alteri addita, illius valorem auget. Magnitudo vero* negativa *dicitur illa, quæ ultra nihilum posita est, sique idcirco alteri adiiciatur, illius valorem minuit*. Utraque hæc magnitudo exemplo debiti, & crediti explicari solet. Sicuti enim credita sunt bona positiva, quia illis peculium augetur; ita e contrario debita sunt bona negativa, quia eorum ratione peculium minuitur: & sicuti valor illius, qui possidet decem nummos, nihilque alteri debet, dicitur esse *decem nummorum*, ita contraria ratione, qui non solum nihil possidet, verum etiam aliquid alteri debet, dicitur habere minus adhuc, quam nihil, ejusque valorem ultra nihilum reperiri. Reapse namque deterioris conditionis

nis eo est, qui nihil quidem possidet, sed nihil quoque alteri debet.

COROLLARIUM.

4 Hinc *zero*, sive *nihil positivam* inter, & *negativam* quantitatem medium locum tenet, quatenus nempe *nihilum* quantitatibus additum, illarum valorem non auget, ut præstat magnitudo *positiva*; neque minuit, ut efficit magnitudo *negativa* (a).

HYPOTHESIS I.

5 Magnitudo Algebrica *positiva* indicatur signo +, *negativa* vero signo —, quod propterea signo + contrarium dicitur. Nimirum *positiva* censetur magnitudo, quæ signo + affecta est, ut magnitudines $+a$, $+xy$ &c. At vero *negativa*, quam oppositum signum — immediate præcedit, ut $-a$, $-mn$ &c.

SCHOLION.

6 Magnitudo Algebrica nulla nota affecta pro *positiva* habenda est. Videlicet perinde est omnino, sive $+a$, sive a scribatur.

DEFINITIO IV.

7 *Magnitudo Algebrica* simplex, *sive* incomplexa, *item* monomia *vocatur illa, quæ una, vel pluribus etiam literis nullo interjecto signo copulatis, exprimitur*. Hujusmodi sunt magnitudines a, bd, mrx &c.

DEFINITIO V.

8 *Magnitudo vero complexa ea est, quæ pluribus terminis constat, interjecta nota* +, *vel* — *simul unitis*. Tales sunt magnitudines $a+b$, $d-e$, $mp+nd-xy$, & aliæ hujusmodi. Porro si duo tantum sint termini, seu partes magnitudinis com-

(a) Videatur Volfius *Elem. Analyseos* §. 18., Nicolaus de Martino Tom. I *Algebræ* cap. 10. num. 1.

complexæ, magnitudo dicitur *binomia*, ut $a+b$, $de-mp$ &c. Si tres, dicitur *trinomia*, ut $a+b-c$. Univerſaliter *polynomia* vocatur, ſi plures partes, contineat.

DEFINITIO VI.

9 *Magnitudines ſimplices, ſicuti etiam termini magnitudinum complexarum dicuntur* ſimiles, *qui eaſdem omnino Alphabeti literas complectuntur, quamvis non eundem ordinem inter ſe habeant*. Similes nempe ſunt magnitudines incomplexæ abc, bac, cab &c., quemadmodum etiam termini ab, ba, nec non dfx, fxd magnitudinum complexarum $ab+dfx-mp$, $px+ba-fxd+xy$.

HYPOTHESIS II.

10 Magnitudines incognitæ poſterioribus Alphabetis literis deſignari ſolent, prioribus vero magnitudines cognitæ.

HYPOTHESIS III.

11 Præter ſigna $+$, $-$, hæc etiam alia $=$, $>$, $<$, ∞ in Algebra adhibentur. Signum $=$ dicitur ſignum *æqualitatis*, quatenus deſignat, eas magnitudines eſſe inter ſe æquales, inter quas reperitur. Sic $a=b$ idem omnino eſt, ac magnitudines a, b eſſe intra ſe æquales. Signum $>$ eſt ſignum *majoritatis*, indicat nempe, magnitudinem, quæ ſignum $>$ immediate precedit, majorem eſſe illa, quæ ſignum ipſum proxime conſequitur. Contra vero ſignum $<$ eſt ſignum *minoritatis*, quatenus deſignat, magnitudinem, quæ ante illud poſita eſt, ab ea deficere, quæ poſt ipſum reperitur. Videlicet $a>b$ idem eſt, ac magnitudinem a majorem eſſe magnitudine b; e contrario vero $a<b$ idem ac terminum a minorem eſſe termino b. Poſtremo ſignum ∞ vocatur ſignum *infinitatis*, quatenus ſcribendo $a=\infty$ indicatur, magnitudo a eſſe infinita. Signis $=$, $>$, $<$ primus omnium uſus eſt Hariottus. Nonnulli cum Carteſio loco ſigni $=$ adhibent ſignum $\propto$.

SE-

SECTIO II.

De additione magnitudinum Algebricarum

DEFINITIO I.

12 A*Dditio est duarum, vel plurium magnitudinum in unum collectio*, nempe *inventio magnitudinis, quæ eas omnes, quarum summa quæritur, simul sumtas adæquet*. Hujusmodi est in vulgari Arithmetica operatio illa, qua ex numero 4., & ex numero 8. efficitur 12.

DEFINITIO II.

13 *Magnitudo, quæ ex pluribus simul additis consurgit, additionis summa vocatur*. Hujusmodi est numerus 12., qui fit ex numeris 4., 8. simul collectis.

PROBLEMA I.

Magnitudines incomplexas simul addere.

Resolutio.

14 Magnitudines algebricæ incomplexæ, quarum una alteri adiicienda est, jungantur simul, mediante signo + illis omnibus interjecto. Aggregatum hinc emergens, erit summa quæsita.

Exemplum.

Ut si colligere simul in unam summam oporteat magnitudines a, b, de, scribendum est $a + b + de$.

De-

Demonstratio.

Etenim unam magnitudinem alteri addere, est unam plus altera sumere (a). Signum autem + significat *plus* (b). Ergo $a+b$ idem erit ac summa ex a, & b.

ANIMADVERSIO I.

15 Si termini algebrici, quos simul jungere oportet, sibi mutuo similes fuerint, omnesque positivi, vel negativi, eorum unus dumtaxat, ceteris neglectis, in calculo scribendus est, præfixa illi nota numerica, quæ exprimat, quoties terminus ille in calculo sumi debeat. Ut si jungendæ simul sint tres magnitudines a, a, a, vel ad, ad, ad, loco aggregati $a+a+a$, vel $ad+ad+ad$, scribendum est $3a$, vel $3ad$. Cum enim quælibet quantitas pro unitate sumi possit, sicuti cyphra numerica 3. tres unitates designat, ita terminus Algebricus $3a$ tres magnitudines indicat magnitudini a æquales.

SCHOLION I.

16 Notæ numericæ, quæ terminos Algebricos præcedunt, eosque in eadem linea immediate afficiunt, numeri *coefficientes* dicuntur. Igitur *coefficiens magnitudinis Algebricæ est numerus illi magnitudini in eadem linea ad sinistram præfixus; indicans quoties magnitudo ipsa in calculo sumenda sit.*

SCHOLION II.

17 Pro *coefficiente* magnitudinis algebricæ nulla nota numerica ad sinistram affectæ, unitas semper intelligitur, ita nimirum ut dm idem sit ac $1dm$, ab idem ac $1ab$ &c.

ANIMADVERSIO II.

18 Si termini literales similes, quarum summa quæritur, *coefficientibus* numeris effecti sint, ipsi numeri simul colligi de-

(a) §. 12.
(b) §. 5.

debent, eorumque summa uni eorum, ceteris deletis, præfigenda est. Ut si magnitudo $3ad$ addenda sit magnitudini $4ad$, scribendum est $7ad$, non autem $4ad + 3ad$.

PROBLEMA II.

Magnitudines complexas simul addere.

Resolutio.

19 Jungantur simul mediante nota positiva $+$, perinde omnino ac si essent magnitudines incomplexæ.

Exemplum.

Ut si magnitudo $d + e - n$ addenda sit magnitudini $a - d + b$, scribendum est $a - d + b + d + e - n$.

Demonstratio.

Eadem est cum demonstratione problematis præcedentis.

ANIMADVERSIO I.

20 Termini similes, & æquales, contrariis signis affecti debent in ipsa summa omnino deleri. Ut si facta fuerit summa $ab + 2de + mn - 2de$ ex magnitudine $mn - 2de$ addita magnitudini $ab + 2de$, delendi in ea sunt termini $+ 2de, - 2de$. Hi namque utpote æquales, & contrarii, omnino sese perimunt. Erit ergo summa $ab + mn$.

ANIMADVERSIO II.

21 Si termini similes contrariis signis affecti, inequales *coefficientes* habeant, minor *coefficiens* majori subtrahi debet, ejusque residuo signum illud præfigendum est, quo major *coefficiens* affectus erat. Ut si in data summa habeantur termini $+ 7ab$, $- 4ab$, sublato *coefficiente* 4. a *coefficiente* 7., cum major

major terminus $7ab$ affectus fit signo $+$; scribendum est $+3ab$, loco nimirum aggregati $+7ab-4ab$. Si vero e contrario habeantur termini $-7ab, +4ab$, scribendum est $-3ab$. Constat enim, contrarios terminos, quatenus æquales, sese perimere.

Monitum.

22 In omnibus calculis Algebricis id ante omnia præstandum est, ut termini similes ad suas simpliciores expressiones reducantur, deleantur nempe, qui contrarii sunt, & æquales; simul vero colligantur in unum, qui sunt sibi mutuo similes, & minime opponuntur.

SECTIO III.

De subtractione magnitudinum Algebricarum.

DEFINITIO I.

23 *Subtractio est unius magnitudinis ex altera subductio, seu inventio magnitudinis, quæ, si magnitudini subductæ adiiciatur, totum constituit, illi æquale, cui fit ipsa subtractio*. Hujusmodi est illa operatio in Arithmetica communi, qua detracto numero 4. ex numero 7., relinquitur 3. Si namque numerus residuus 3. numero 4., qui subtrahitur, adiiciatur, numerus ipse 7. efficitur.

DEFINITIO. II.

24 *Magnitudo, quæ, facta subtractione, relinquitur, differentia & residuum vocari solet*. Talis est in exemplo superius posito numerus 3.

CORO-

COROLLARIUM.

25 Hinc *subtractio* per *additionem*, & vicissim *additio* per *subtractionem* ostenditur. Optime nimirum facta est *subtractio*, si differentia simul cum eo, quod subtractum est, totum illud constituat, cui facta fuit subductio. Vicissim legitime *additio* peracta est, si altera magnitudinum, quæ simul collectæ fuerant, ex tota summa sublata, quod superest, earundem alteram adæquet.

PROBLEMA I.

Magnitudinem incomplexam alteri incomplexæ subtrahere.

Resolutio.

26 Magnitudines, quarum una alteri subducenda est, simul jungantur mediante signo negativo —, ea quidem lege, ut magnitudo, cui altera subtrahi debet, signum — immediate præcedat; ea vero, quæ debet subtrahi, signum ipsum immediate consequatur.

Exemplum.

Ut si magnitudinem b magnitudini a subtrahere oporteat, scribendum est $a-b$. Complexa enim magnitudo $a-b$ duarum a, b differentiam designat.

Demonstratio.

Unam magnitudinem alteri subtrahere est unam minus altera sumere(a). Cum igitur signum — significet *minus* (b), $a-b$ perinde erit ac magnitudo a minus magnitudine b, nempe differentia, quæ remanet, facta subductione termini b a termino a.

C ANI-

(a) § 23.
(b) § 5.

Animadversio I.

27 Si magnitudines incomplexæ, quarum una alteri subducenda est, similes fuerint inter se, & omnino æquales, per subtractionem evanescunt, ac proinde deleri debent. Cum enim sint inter se æquales, nihil, facta subtractione, relinquitur.

Animadversio II.

28 Si magnitudines fuerint quidem similes, sed inæqualibus *coefficientibus* affectæ, observandum est, an minor magnitudo a majori, num vero major a minori auferri debeat. Etenim si primum: facta subductione minoris *coefficientis* a majori, residuus numerus eidem termino præfigendus est cum nota positiva +. Ut si magnitudini $7ab$ subtrahere oporteat magnitudinem $4ab$, differentia erit $+3ab$: Sin alterum: residuus numerus eidem termino præfigendus est cum nota negativa −. Ut si magnitudo $7ab$ subducenda sit magnitudini $4ab$, differentia erit $-3ab$. Ratio est evidens. Quandoquidem si ab eo, qui possidet septem nummos, quatuor auferantur, tres illi adhuc remanent; ac proinde illius valor adhuc est citra nihilum. Si vero ab eo, qui quatuor tantum habet nummos, septem nummi auferendi sint propter debitum, sublatis quatuor, quos possidet, debitor manet trium nummorum, quo fit propterea, ut illius valor sit minor nihilo.

PROBLEMA II.

Magnitudinem complexam alteri complexæ subtrahere.

Resolutio.

29 Jungantur magnitudines ipsæ mediante signo negativo −, perinde ac si essent simplices. Signa vero positiva magnitudinis subtrahendæ mutentur in negativa, & vicissim negativa in positiva. Quatuor idcirco casus distinguendi

di sunt. Vel enim auferri debet magnitudo positiva a positiva; vel positiva a negativa; vel negativa a positiva; vel negativa a negativa.

Casus I.

30 Si magnitudo positiva $c+d$ subtrahenda sit magnitudini itidem positivæ $a+b$, residuum erit $a+b-c-d$

Demonstratio.

Cum enim tota summa $c+d$ removenda sit a magnitudine $a+b$, singulæ partes ipsius $c+d$ subtrahi debent magnitudini $a+b$. Quamobrem mutandum est signum $+$ in $-$, adeoque scribendum $a+b-c-d$. Hoc enim enim ipso tam pars c, quam pars d ipsi $a+b$ subtrahitur.

Casus II.

31 In subtractione magnitudinis positivæ $c+d$ a negativa $a-b$, scribendum est pro residuo $a-b-c-d$.

Demonstratio.

Eadem est cum præcedenti.

Casus III.

32 Si magnitudo negativa $c-d$ subduci debeat magnitudini positivæ $a+b$, residuum hoc modo exprimendum est $a+b-c+d$.

Demonstratio.

Enimvero cum $c-d$ exprimat differentiam magnitudinis c supra magnitudinem d (a), hæc tantum subtrahi debet magnitudini $a+b$. Si autem scriberetur pro residuo $a+b-c-d$, magnitudini $a+b$ subducta esset tota magnitudo c, secus ac

C 2 fieri

(a) §. 26.

fieri debeat; subtrahi enim debet excessus dumtaxat ipsius c supra d. Ne igitur plus justo auferatur, facta subductione termini c, adiiciendus est residuo $a+b-c$ terminus d; atque adeo scribendum $a+b-c+d$.

Casus IV.

33 Si magnitudo negativa $c-d$ subtrahenda sit magnitudini itidem negativæ $a-b$, residuum erit $a-b-c+d$.

Demonstratio.

Patet ex præcedenti. Etenim perinde omnino est, sive magnitudini positivæ $a+b$, sive negativæ $a-b$ magnitudo negativa $c-d$ subducatur.

ANIMADVERSIO.

34 Si in magnitudinibus complexis, quarum una alteri subtrahi debet, occurrant termini similes æqualibus, vel inæqualibus *coefficientibus* numeris affecti, ea in illorum subductione observentur, quæ superiori loco §. 27., & 28. animadvertenda notavimus.

SECTIO IV.

De multiplicatione magnitudinum Algebricarum.

DEFINITIO I.

35 *Multiplicatio unius magnitudinis per aliam est inventio magnitudinis, quæ toties contineat magnitudinem multiplicatam, quoties magnitudo multiplicans continet unitatem*, vel *quæ sit hujusmodi pars, vel partes magnitudinis multiplicatæ; cujusmodi pars, vel partes unitatis est magnitudo multiplicans.*

Ta-

Talis est in vulgari Arithmetica operatio illa, qua ex numero 4. multiplicato per numerum 5. fit numerus 20., & ex numero fracto $\frac{2}{3}$ multiplicato per fractum $\frac{3}{4}$ numerus $\frac{6}{12}$ efficitur. Constat enim, numerum 20. toties continere numerum 4. multiplicatum, quoties numerus 5. multiplicans unitatem comprehendit. Similiter quæ partes unitatis est fractio $\frac{3}{4}$, easdem partes fractionis $\frac{2}{3}$ esse fractionem $\frac{6}{12}$, quæ ex multiplicatione fractionis $\frac{2}{3}$ per fractionem $\frac{3}{4}$ producitur. Fractio namque $\frac{6}{12}$ ter continet fractionem $\frac{2}{12}$, quæ est quarta pars fractionis $\frac{8}{12}$, cui fractio $\frac{2}{3}$ est æqualis.

DEFINITIO II.

36 *Magnitudo, quæ nascitur ex multiplicatione unius magnitudinis per aliam, factum, seu productum nuncupatur*; Sic numerus 20. dicitur *factum*, sive *productum* ex ductu numeri 4. in numerum 5.

COROLLARIUM.

37 *Productum, quod fit ex multiplicatione cujusvis magnitudinis per unitatem, diversum aliquid non est ab ipsa magnitudine multiplicata.* Ut si magnitudo *a* multiplicetur per unitatem, productum erit ipsamet magnitudo *a*. Quandoquidem sicuti unitas non nisi semel seipsam continet, ita factum ex hac multiplicatione non nisi semel debet magnitudinem *a* continere. Igitur hujusmodi productum erit magnitudini *a* æquale, quemadmodum unitas seipsam adæquat.

PRO-

PROBLEMA I.

Magnitudinem incomplexam per alteram incomplexam multiplicare.

Resolutio.

38 Magnitudines incomplexæ, quarum una in alteram ducenda est, copulentur sibi mutuo, nullo plane signo interjecto. Aggregatum hujusmodi erit factum quæsitum.

Exemplum.

Ut si multiplicare oporteat magnitudinem *a* per magnitudinem, *b*, & magnitudinem *dx* per magnitudinem *fg*, scribendum est *ab*, *dxfg*. Est enim *ab* factum ex ductu *a* in *b*, & *dxfg* factum ex ductu *dx* in *fg*.

HYPOTHESIS.

39 Multiplicatio unius magnitudinis per aliam indicatur signo ×, magnitudines nempe, quarum una in aliam ducenda est, eo interjecto copulando. Sic $a \times b$ designat, magnitudinem *a* multiplicandam esse per magnitudinem *b*, atque adeo productum *ab*, quod ex hac multiplicatione efficitur.

ANIMADVERSIO I.

40 Perinde omnino est, quocunque ordine literæ in producto Algebrico sibi mutuo apponantur. Ut, si multiplicare oporteat magnitudines *a*, *b* inter se mutuo, perinde est omnino, sive *a* per *b*, sive *b* per *a* multiplicetur, atque adeo sive *ab*, sive *ba* pro facto habeatur. Esto namque $a = 5.$, $b = 2.$ Multiplicando 5. per 2., sive *a* per *b*, *bis* quinarius, ac proinde *decies* unitas sumitur. Multiplicando vero 2. per 5., sive *b* per *a*, *quinquies* sumitur binarius, & ideo *decies* unitas.

Ergo

Ergo idem emergit productum, sive 5. per 2., sive 2. per 5. multiplicetur; eritque propterea $ab = ba$, & eadem ratione $abc = bac = cba$ &c.

ANIMADVERSIO II.

41 Quoties eadem litera pluries, quam bis, in eodem producto occurrit, semel tantum in illo scribenda est. Tum vero paulo altius post ipsam character arithmeticus illi appingi debet, qui exprimat, quoties ipsa litera in tali producto contineatur. Sic loco producti aaa scribitur a^3, loco producti $bbbb$ scribitur b^4 &c.

SCHOLION I.

42 Character Arithmeticus paulo altius post literam positus, *exponens* nuncupatur, quatenus nempe *designat factum ex ipsa litera tot vicibus una minus in seipsam ducta, quot unitates ipse numerat*. Sic *exponens* 2. magnitudinis a^2 exprimit productum ex magnitudine a semel ducta in seipsam; *exponens* 3. magnitudinis b^3 designat productum, quod duplici multiplicatione efficitur, nimirum ex b per seipsam, & ex bb iterum per b, atque ita de ceteris.

SCHOLION II.

43 *Exponens* literæ, quæ semel tantum scribenda est, ab unitate non distinguitur. Et licet unitas tunc literæ non appingatur, attamen veluti illi appicta supponitur, ita nimirum ut a idem sit ac a^1, & b idem b^1 &c.

ANIMADVERSIO III.

44 Si uterque multiplicationis terminus *coefficiente* numero affectus sit, facta literalium terminorum multiplicatione, ipsi quoque numeri inter se mutuo multiplicari debent, & numerus hinc emergens illi producto præfigi, utpote illius *coefficiens*.

ciens. Sic productum ex multiplicatione termini $4ab$ per terminum $3de$ erit $12abde$. Ratio ex infra dicendis patebit.

ANIMADVERSIO IV.

45 Si vero alter dumtaxat terminorum, qui inter se mutuo multiplicandi sunt, *coefficiente* numero sit affectus, multiplicatis terminis, producto hinc facto idem *coefficiens* praefigi debet. Ut si multiplicare oporteat magnitudinem $3a$ per bd, productum erit $3abd$. Hujus quoque ratio ex dicendis perspecta habebitur.

ANIMADVERSIO V.

46 Numeri *exponentes* terminorum similium, qui eadem litera expressi sunt, debent in ipsorum terminorum multiplicatione simul colligi, & summa eidem literae appingi. Ut si multiplicanda sit magnitudo a^2 per magnitudinem a^3, productum erit a^5. Est enim a^2 idem ac aa, & a^3 idem ac aaa, sicuti etiam a^5 idem ac $aaaaa$ (a). Ergo erit $a^2 \times a^3 = a^5$.

ANIMADVERSIO VI.

47 Si autem magnitudines multiplicandae eadem litera expressae non fuerint, facta literarum unione, unicuique suus *exponens* appingendus est, perinde ac si nulla facta fuisset multiplicatio. Sic productum ex a^2 in b^3 erit a^2b^3. Constat enim, ex multiplicatione termini aa per terminum bbb oriri productum $aabbb$, adeoque a^2b^3 (b).

SCHOLION.

48 Si idem fuerit *exponens* literarum dissimilium, quae inter se mutuo multiplicandae sunt, ut si multiplicare oporteat magnitudinem a^3 per magnitudinem b^3, loco producti a^3b^3 scribi solet $\overline{ab}^3$.

PRO-

(a) §. 41.
(b) §. 38.

PROBLEMA II.

Magnitudinem complexam per alteram complexam multiplicare.

Resolutio.

49 Singuli termini unius ducantur in singulos terminos alterius, quæque inde fiunt producta partialia, ope signorum, quæ illis debentur juxta regulas infra tradendas, simul colligantur. Hujusmodi namque aggregatum erit productum totale quæsitum.

Exemplum.

Multiplicare oporteat *trinomium* $a + b + c$ per *binomium* $d + e$. Primo itaque multiplicentur singuli termini magnitudinis $a + b + c$ per terminum d; deinde omnes iidem termini per terminum e. Ex prima multiplicatione oritur productum $ad + bd + cd$; ex secunda vero productum $ae + be + ce$, quæ simul collecta dant productum $ad + bd + cd + ae + be + ce$. Hoc ergo erit productum totale ex multiplicatione *trinomii* $a + b + c$ per *binomium* $d + e$.

Demonstratio.

Unum totum non potest per alterum totum multiplicari, nisi singulæ partes unius in singulas partes alterius ducantur; totque proinde in producto totali habeantur partialia producta, quot unitates numerat factum ex numero partium, quæ sunt in uno, multiplicato per numerum partium, quæ in altero reperiuntur. Non enim totum a suis partibus simul unitis distinguitur. Ergo &c.

SCHOLION.

50 Hinc patet, cur *coefficientes* terminorum multiplicari inter se mutuo debeant, ut diximus, supra §. 44., & factum numericum producto Algebrico adjungi, nimirum productum, quod nascitur ex termino $4ab$ multiplicato per $3de$, esse $12abde$. Enimvero cum $4ab$ idem sit ac $ab+ab+ab+ab$, & $3de$ idem ac $de+de+de$ (a); productum autem ex multiplicatione *quadrinomii* $ab+ab+ab+ab$ per *trinomium* $de+de+de$ *duodecies* contineat productum partiale $abde$, perspicuum remanet, productum ex $4ab$ per $3de$ necessario esse $12abde$.

ANIMADVERSIO I.

51 Si termini magnitudinum complexarum, quarum una in alteram ducenda est, *coefficientibus*, aut *exponentibus* numeris sint affecti, ea in illorum multiplicatione observentur, quæ §. 44. & sequentibus tradidimus. Ut si multiplicare oporteat *binomium* $3ab+d^3$ per *binomium* $4ab+d^2$, cum sit $3ab\times4ab = 12\overline{ab}^2$ (b), $d^3\times4ab=4abd^3$ (c), $3ab\times d^2=3abd^2$ (d), $d^3\times d^2=d^5$ (e), productum totale erit $12\overline{ab}^2+4abd^3+3abd^2+d^5$.

ANIMADVERSIO II.

52 In multiplicatione magnitudinum complexarum consideranda sunt signa, quibus singuli ipsarum termini sunt affecti. Hinc enim dependet determinatio signi, quo singula producta partialia affici debeant, simulque propterea in producto totali conjungi. Sequentes itaque leges sunt observandæ.

Plus

(a) §. 51.
(b) §. 44.
(c) §. 45.
(d) §. 45.
(e) §. 46.

I.

Plus per plus reddit plus.

53 Videlicet si omnes termini magnitudinum complexarum, quarum una in alteram ducenda est, signo positivo + sint affecti, singula quoque partialia producta eodem signo affici debent. Ut si multiplicare oporteat magnitudinem $a+b$ per magnitudinem $c+d$, productum totale erit $ac+ad+bc+bd$.

Demonstratio.

Factum ex multiplicatione toties continet, vel continetur in termino multiplicato, quoties terminus multiplicans continet, vel continetur in unitate (a). Quod autem aliquoties continet magnitudinem positivam, vel in illa continetur, est magnitudo itidem positiva. Ergo factum ex multiplicatione magnitudinis positivæ per positivam necessario est magnitudo positiva.

II.

Plus per minus reddit minus.

54 Factum scilicet ex ductu termini affecti signo positivo + in terminum affectum signo negativo −, afficiendum quoque est signo negativo −. Sic productum ex multiplicatione magnitudinis $a+d$ per magnitudinem $b-c$ erit $ab+bd-ac-dc$.

Demonstratio.

Cum enim $b-c$ residuum exprimat, quod remanet, detracta magnitudine c ex magnitudine b (b), magnitudo $a+d$ multiplicanda non est per totam b, sed per illud residuum dumtaxat. Productum igitur $ab+db$ est majus justo, tota nimi-

(a) §. 35.
(b) § 24.

rum ea quantitate,quę efficitur multiplicando utrumque terminum magnitudinis $a + d$ per partem negatam c. Quamobrem a producto $ab + db$ removenda sunt producta ac, dc, atque adeo scribendum $ab + db - ac - dc$.

I I I.

Minus per plus reddit minus.

55 Si nempe terminus affectus signo negativo — multiplicetur per terminum, qui signo positivo + donetur, ut $a - b$ per $c + d$, productum signo negativo — affici debet, videlicet hujusmodi productum erit $ac + ad - cb - db$.

Demonstratio.

Coincidit cum præcedenti. Perinde enim est sive $a - b$ per $c + d$, sive $c + d$ per $a - b$ multiplicetur.

I V.

Minus per minus reddit plus.

56 Videlicet factum ex multiplicatione magnitudinis negativæ per negativam erit magnitudo positiva. Ut si multiplicanda sit magnitudo $a - b$ per magnitudinem $c - d$, productum erit $ac - cb - da + bd$.

Demonstratio.

Enimvero, cum multiplicanda non sit tota magnitudo a per totam magnitudinem c, sed tantum pars unius per partem alterius, nempe residuum per residuum, productum ac majus erit justo. Illi ergo subtrahendum est productum cb factum ex ductu totius c in partem negatam b, nec non productum da, quod emergit ex parte negata d multiplicata per

totam

totam a. Verum subtrahendo productum cb, plus justo subtrahitur. Quandoquidem, si ponatur $c - d = x$, ac proinde $x + d = c$(a), erit $x + d \times b = c \times b$, sive $bx + bd = cb$; adeoque subtrahendo productum cb producto ac, subtrahitur ipsi *binomium* $bx + bd$. Constat autem, subtrahendum dumtaxat esse productum bx; cum hujusmodi productum debeat esse factum non ex toto termino c multiplicato per b; sed ex termino c imminuto magnitudine d per ipsum b multiplicato. Ergo ne plus justo auferatur, sublatis productis cb, da, addendum est productum bd; ac proinde scribendum $ac - cb - da + bd$.

COROLLARIUM.

57 Igitur perspicuum remanet, eadem signa in multiplicatione efficere $+$; diversa vero reddere $-$.

SCHOLION.

58 Licet exempla superius posita exhibeant multiplicationem *binomii* per *binomium*, propterea quod, ut notat Cl. Volfius, magnitudo negativa per negativam, proprie loquendo, multiplicari nequeat, sed tantum prout *privativa positivis junguntur*(b); attamen singuli termini complexæ magnitudinis considerari possunt sine ulla ratione ad alios, quibus copulati sunt, videlicet perinde omnino ac si essent magnitudines incomplexæ. Si ergo termini, quorum alter per alterum multiplicari debet, iisdem signis affecti sint, productum afficiendum est signo positivo $+$; contra vero signo negativo $-$, si illorum alter signum $+$, alter signum $-$ sibi præfixum habeat, erit nempe $+a \times +b = +ab$, $-a \times -b = +ab$, $+a \times -b = -ab$, $-a \times +b = -ab$.

PRO-

(a) §. 21.
(b) Elem. Analyseos §. 34.

PROBLEMA III.

Polynomium per monomium multiplicare.

Resolutio.

59 Ducatur *monomium* in singulos terminos *polynomii*, quæque inde fiunt producta, debitis signis simul copulentur.

Exemplum.

Multiplicare oporteat magnitudinem $a + b + c$ per magnitudinem d. Singuli termini magnitudinis $a + b + c$ multiplicentur per magnitudinem d. Productum totale erit $ad + bd + cd$.

Demonstratio.

Non enim tota magnitudo $a + b + c$ multiplicatur per magnitudinem d, nisi singulæ illius partes in ipsam d ducantur.

ANIMADVERSIO.

60 Si *monomium*, per quod magnitudo *polynomia* multiplicanda est, nullo signo sit affectum, producta partialia iisdem signis affici debent, quibus *respective* affecti sunt termini multiplicati. Ut si multiplicare oporteat magnitudinem $a + b - c$ per magnitudinem d, productum erit $ad + bd - cd$. Est enim d idem ac $+ d$ (a). Est autem $+ b \times + d = + bd$ (b), & $- c \times + d = - cd$ (c). Ergo erit quoque $\overline{a + b - c} \times d = ad + bd - cd$. Si autem magnitudo multiplicans præfixum habeat signum $-$, producta partialia illis signis afficiantur, quæ juxta leges superius traditas (d) ipsis singulis conveniunt.

(a) §. 6.
(b) §. 53.
(c) §. 55.
(d) §. 53. & seq.

SCHO-

SCHOLION

61 Hinc oſtenditur, quod ſuperiori loco traditum eſt de *coefficiente* producti ex multiplicatione magnitudinum ſimplicium, quarum altera nullo *coefficiente* ſit affecta, videlicet hujuſmodi producto *coefficientem* illum præfigi debere, quo illarum altera donatur (a), ut ſi multiplicare oporteat magnitodinem $3a$ per bd, ſcribendum eſſe $3abd$. Eſt enim $3a$ idem ac $a+a+a$ (b). Ergo erit $3a\times bd = \overline{a+a+a}\times bd = abd + abd + abd = 3abd$.

Monitum.

62 Utile tamen plerumque eſt, multiplicationem complexarum magnitudinum nequaquam inſtituere, ſed ope ſigni $\times$ eam tantummodo indicare. Ut ſi magnitudo $a+b-c$ multiplicanda ſit per magnitudinem $d-e$ loco producti $ad+db-dc-ea-eb+ec$, quod inde efficitur, ſufficit ſcribere $\overline{a+b-c}\times\overline{d-e}$.

SECTIO V.

De diviſione magnitudinum algebricarum.

DEFINITIO I.

63 D*iviſio unius magnitudinis per aliam eſt inventio magnitudinis, quæ toties contineat unitatem, vel quoad aliquam, aut aliquas ſui partes in unitate toties contineatur, quoties magnitudo dividenda continet diviſorem, vel in diviſore quoad aliquam, vel aliquas ſui partes comprehenditur.* Sic dividere 12. per 4. idem eſt ac invenire numerum, qui *ter* contineat unitatem, quemadmodum numerus diviſus 12. *ter* comprehendit diviſorem 4. Similiter dividere 4. per 12. eſt inve-

ni-

(a) §. 45.
(b) §. 25.

nire numerum, quæ sit *tertia pars* unitatis, ficuti divisus 4. eſt *tertia pars* diviſoris 12.

DEFINITIO. II.

64 Quantitas per diviſionem inventa dicitur *quotus*, ſive *quotiens* diviſionis. Quamobrem *quotus diviſionis eſt quantitas, quæ eodem modo continet unitatem, vel in unitate continetur, quo terminus diviſus continet diviſorem, vel in ipſo diviſore comprehenditur*. Nimirum numerus 3. eſt *quotus* numeri 6. diviſi per 2., & fractio $\frac{1}{4}$ eſt quotus numeri ejuſdem 3. diviſi per 12. Quandoquidem ſicuti 6. *ter* continet diviſorem 2., & numerus 3. eſt *quarta pars* diviſoris 12., ita quotus 3. *ter* comprehendit unitatem, & fractio $\frac{1}{4}$ *unam quartam* unitatis partem deſignat.

COROLLARIUM I.

65 *In omni diviſione ſi diviſor per quotientem multiplicetur, productum efficitur termino diviſo æquale* Ut, ſi *quotus* magnitudinis *a* diviſæ per magnitudinem *b* ſit quantitas *x*, erit $b \times x$, ſive productum *bx* æquale termino *a* diviſo. Productum namque *bx* toties continet terminum *b* multiplicatum, quoties terminus *x* multiplicans continet unitatem, vel productum *bx* eſt hujuſmodi pars, vel partes termini *b*, cujuſmodi pars, aut partes unitatis eſt quantitas *x* (a). Terminus autem *a* diviſus per *b* toties continet diviſorem *b*, quoties quotus *x* continet unitatem, vel terminus *a* eſt hujuſmodi pars, vel partes diviſoris *b*, cujuſmodi pars, aut partes unitatis eſt quotus *x* (b). Ergo productum *bx* eodem penitus modo continet diviſorem *b*, vel in illo continetur, quo terminus *a* diviſus eundem *b* itidem continet, vel in illo comprehenditur. Evidenter autem ex terminis conſtat, magnitudines illas eſſe æquales inter ſe, quæ toties ex æquo eandem quantitatem con-

(a) §. 35.
(b) §. 64.

continent, vel in eadem continentur. Ergo factum *bx* æquale erit termino *a*; ac proinde &c.

COROLLARIUM II.

66 Hinc *divisio optime peracta est, si divisore per quotientem multiplicato, productum fiat termino diviso æquale*. Ut si *quotus* magnitudinis *a* divisæ per magnitudinem *b* fuerit *x*, optima erit divisio, si factum *bx* fuerit æquale magnitudini *a* divisæ.

COROLLARIUM III.

67 Quemadmodum per multiplicationem bonitas divisionis ostenditur, ita per divisionem legitimane facta sit multiplicatio demonstratur. *Optime* nimirum *peracta erit multiplicatio, si diviso producto per unam magnitudinum, ex quarum multiplicatione productum ipsum efficitur, altera earundem pro quotiente erumpat*. Sic factum ex *a* in *b* est *ab*, si diviso *ab* per *a*, *quotus* sit *b*, diviso autem per *b*, *quotus* sit *a*.

COROLLARIUM IV.

68 *Quotus unius magnitudinis per alteram sibi æqualem divisa est unitas*. Ut si dividatur magnitudo *a* per seipsam, quotus erit 1. Eodem namque modo unitas seipsam, sicuti magnitudo divisa tunc divisorem comprehendit.

COROLLARIUM V.

69 *Quotus magnitudinis per unitatem divisæ diversum aliquid non est ab ipsa divisa magnitudine*. Ut si magnitudo *a* per unitatem dividatur, quotus erit ipsa eadem magnitudo *a* divisa.

PROBLEMA I.

Magnitudinem incomplexam per alteram incomplexam dividere.

Resolutio.

70 Ducta lineola, divisor infra dividendum scribatur. Fractio hinc emergens erit *quotus* divisionis quaesitus.

Exemplum.

Ut si dividere oporteat magnitudinem a per magnitudinem b, scribendum est $\frac{a}{b}$

Demonstratio.

Enimvero quemadmodum in Arithmetica vulgari fractio $\frac{18}{6}$ exprimit divisionem numeri 18. per numerum 6., atque ipsius divisionis *quotientem* 3. adaequat, ita in Algebra fractio $\frac{a}{b}$ divisionem designat magnitudinis a per magnitudinem b, ipsaque fractio pro divisionis *quotiente* jure potest assumi.

SCHOLION.

71 Loco fractionis divisionem indicantis magnitudo aliqua simplex, vel complexa pro divisionis *quotiente* plerumque assumitur; & tunc dicitur una magnitudo alteri in calculo substitui. Ut si loco fractionis $\frac{a}{d}$, qua indicatur divisio termini a per d, assumatur quantitas m simplex, vel complexa $p+r$, aut alia hujusmodi; quantitas m, vel $p+r$ dicitur sub-

substitui quantitati $\frac{a}{d}$. Quantitas autem $\frac{a}{d}$ vocatur valor ipsius quantitatis assumtæ m, aut $p+r$; unde scribitur $\frac{a}{d}=m$, $\frac{a}{d}=p+r$ &c.

ANIMADVERSIO I.

72. Si magnitudo Algebrica dividenda omnes divisoris literas contineat, hisce omnibus in illa deletis, quod superest, erit *quotus* divisionis. Sic divisa magnitudine abc per b, *quotus* erit ac; divisa per bc, *quotus* erit a. Est enim $b\times ac=abc$, sicuti etiam $bc\times a=bca$(a). Igitur erit etiam $\frac{abc}{b}=ac$, $\frac{bca}{bc}=a$(b)

ANIMADVERSIO II.

73 Si quæ tantum literæ divisoris in magnitudine dividenda habeantur, ipsis in utraque magnitudine deletis, quod in divisore superest, illi subscribatur, quod relinquitur in magnitudine divisa. Hęc enim fractio erit *quotus* quęsitus. Sic *quotus* termini $abcd$ divisi per adx erit $\frac{bc}{x}$. Si namque fractioni $\frac{bc}{x}$ substituatur quantitas m, erit $xm=bc$ (c), atque adeo $admx=abcd$; cum posita æqualitate terminorum xm, bc, perinde sit omnino, sive per xm, sive per bc magnitudo ad multiplicetur. Est autem $\frac{adxm}{adx}=m$(d). Ergo erit quoque $\frac{abcd}{adx}=m$; ac proinde, si *quotienti* m illius valor $\frac{bc}{x}$ substituatur, erit $\frac{abcd}{aax}=\frac{bc}{x}$.

E 2 ANI-

(a) §. 38.
(b) § 66.
(c) §. 66.
(d) §. 72.

ANIMADVERSIO III.

74 Si divisor, & dividendum *coefficientes* habeant, divisis, methodo superius tradita, ipsis literis, *coefficiens* termini dividendi per divisoris *coefficientem* dividatur, & *quotus* numericus *quotienti* Algebrico præfigatur. Quod si nullus sit *quotus* Algebricus, *quotus* ipse numericus pro *quotiente* quæsito habendus est. Sic divisa magnitudine $8abx$ per $4ab$, *quotus* erit $2x$. Est enim $\frac{abx}{ab} = x$ (a), & $\frac{8}{4} = 2$. Divisa vero magnitudine $8md$ per magnitudinem $2md$, *quotus* erit 4; cum sit $\frac{md}{md} = 1$ (b), & $\frac{8}{2} = 4$.

ANIMADVERSIO IV.

75 Si numeri *coefficientes* dividi possint, minime vero termini Algebrici, utpote omnino dissimiles; aut vicissim dividi queant termini, non sic autem *coefficientes* eorundem numeri, dividendum tunc est, quod dividi potest; quod vero superest, debet ad fractionem reduci. Sic divisa magnitudine $8bc$ per $4a$, *quotus* erit $\frac{2bc}{a}$. Divisa autem magnitudine $7bc$ per $2b$, *quotus* erit $\frac{7c}{2}$. Cum enim divisa magnitudine bc per a, *quotus* non possit aliter exprimi, quam per $\frac{bc}{a}$, & diviso *coefficiente* 8. per *coefficientem* 4., *quotus* sit 2., *quotus* termini $8bc$ divisi per $4a$ nequit esse, nisi $\frac{2bc}{a}$. Similiter quoniam diviso bc per b, *quotus* est c (c), nonnisi *coefficiens* 7. termini $7c$ dividendus remanet per *coefficientem* 2. Quamobrem pro *quotiente* scribendum est $\frac{7c}{2}$. Ceterum hujus *animadversionis* ratio

(a) §. 72.
(b) §. 68.
(c) §. 72.

tio ex fractionum calculo infra tradendo manifeste patebit: Enimvero cum productum ex multiplicatione fractionis $\frac{2bc}{a}$ per $4a$ sit $\frac{8bca}{a}$, factum vero ex multiplicatione fractionis $\frac{7c}{2}$ per $2b$ sit $\frac{14bc}{2}$, sitque $\frac{8bca}{a} = 8bc$ (a), & $\frac{14bc}{2} = 7bc$, erit quoque $\frac{8bc}{4a} = \frac{2bc}{a}$, & $\frac{7bc}{2b} = \frac{7c}{2}$ (b).

ANIMADVERSIO V.

76 Si termini, quorum alter per alterum dividendus est, eadem litera sint expressi, & inæquales *exponentes* habeant, fit eorum divisio, auferendo *exponentem* divisoris ab *exponente* magnitudinis dividendæ, & quod hinc superest, eidem termino appingendo. Ut si dividere oporteat b^4 per b^2, *quotus* erit b^2. Ratio est, quia cum b^4 idem sit ac $bbbb$, & b^2 idem ac bb (c), sicuti diviso $bbbb$ per bb, *quotus* est bb (d) ita diviso b^4 per b^2, *quotus* erit b^2.

ANIMADVERSIO VI.

77 Quod si tam divisor, quam magnitudo dividenda easdem omnino literas contineant inæqualibus *exponentibus* affectas, *exponens* cujuslibet literæ divisoris subducatur *exponenti*, quo eadem litera affecta est in termino dividendo. Si nihil respectu unius, vel alterius literæ, hac subductione facta, remaneat, litera hujusmodi in *quotiente* negligenda est. Si quid vero superest, id eidem literæ appingatur, eritque divisionis *quotus*. Sic divisa magnitudine a^2b^6 per magnitudinem a^2b^4, *quotus* erit b^2. Divisa vero magnitudine a^4b^6 per magnitudinem a^3b^2, *quotus* erit ab^4. Constat enim, esse $a^2b^4 \times b^2 = a^2b^6$, & $a^3b^2 \times ab^4 = a^4b^6$ (e).

ANI-

(a) §. 74.
(b) §. 66.
(c) §. 41.
(d) §. 72.
(e) §. 40.

Animadversio VII.

78 Demum si termini *exponentibus* affecti fuerint sibi mutuo omnino dissimiles, divisor termino dividendo subscribatur, perinde ac si *exponentes* non haberent. Sic fractio $\frac{a^x}{b^z}$ erit *quotus* magnitudinis a^x per magnitudinem b^z divisæ.

PROBLEMA II.

Magnitudinem complexam per alteram complexam dividere.

Resolutio.

79 Dividatur primus terminus magnitudinis dividendæ per illum terminum divisoris, qui in illo continetur. Quotus inventus per totum divisorem multiplicetur, quodque hinc fit productum, toti magnitudini dividendæ subducatur. Residuum iterum per eundem terminum dividatur, ductoque ipso quotiente in integrum divisorem, quod efficitur, auferatur ex priori residuo magnitudinis dividendæ; atque ita deinceps, donec, facta subductione, nihil remaneat. *Quotientes* partiales hac ratione inventi, jungantur simul ope signorum, quæ singulis competunt juxta leges infra tradendas. Hujusmodi aggregatum erit quotus quæsitus.

Exemplum.

Dividenda sit magnitudo $ea + eb + ec + da + db + dc$ per magnitudinem $e + d$. Primo itaque divido terminum ae per terminum e, cumque divisionis *quotiens* sit a (a), multiplico divisorem $e + d$ per ipsum a, & productum hinc factum $ae + ad$ aufero a tota magnitudine $ae + eb + ec + da + db + dc$.

Quo-

(a) §. 72.

Quotum a ad dexteram scribo, utpote qui primus est terminus *quotientis* quæsiti. Terminum *eb* residui *eb + ec + db + dc* divido per divisorem *e*; tum per *quotum b* multiplicato divisore integro *e + d*, factum *eb + bd* subtraho priori residuo *eb + ec + db + dc*, & quotum *b quotienti a* adjungo ope signi +, qui, ut patebit, illi debetur, ut proinde *quotus* hactenus inventus sit *a + b*. Terminum *ec* posterioris residui *ec + dc* similiter divido per eundem divisorem *e*; & per *quotum c* multiplico integrum divisorem *e + d*. Productum, quod hinc efficitur *ec + dc*, aufero a residuo *ec + dc*; & quoniam nihil ex hac subductione relinquitur, addito *quotiente c* quotienti *a + b* ope signi +, quod termino *c* itidem convenit, concludo quantitatem *a + b + c* esse *quotientem* quæsitum.

Demonstratio.

Multiplicato divisore *e + d* per *quotientem a + b + c*, quod hine fit productum, est ipsa magnitudo divisa *ae + eb + ec + da + db + dc* (a). Ergo *quotus* hujusce divisionis est quantitas *a + b + c* (b); atque adeo legitime peracta est ipsa divisio (c).

ANIMADVERSIO I.

80 Quoniam vero in divisione magnitudinum complexarum ratio habenda est signorum, quibus earum termini sunt affecti, ut inde pateat, quibusnam signis *quotientes* partiales simul jungi debeant, sequentes regulæ assignantur.

I.

Plus per plus reddit plus.

81 Divisa nimirum quantitate + *ab* per + *a*, *quotus* erit + *b*.

De-

(a) §. 49.
(b) §. 65.
(c) §. 66.

Demonstratio.

Cum enim sit $+a \times +b = +ab$ (a), erit quoque $\frac{+ab}{+a} = +b$ (b).

II.

Plus per minus reddit minus.

82 Ut si magnitudo $+ab$ dividatur per $-a$, *quotus* erit $-b$.

Demonstratio.

Si namque multiplicetur $-a$ per $-b$, productum efficitur $+ab$ (c). Ergo erit $\frac{+ab}{-a} = -b$ (d).

III.

Minus per plus reddit minus.

83 Videlicet diviso termino $-ab$ per $+a$, *quotus* erit $-b$.

Demonstratio.

Constat enim, esse $+a \times -b = -ab$ (e). Igitur erit $\frac{-ab}{+a} = -b$ (f).

IV.

Minus per minus reddit plus.

84 Vt si dividenda sit magnitndo $-ab$ per $-a$, *quotus* erit $+b$.

De-

(a) §. 53.
(b) §. 66.
(c) §. 56.
(d) §. 66.
(e) §. 54.
(f) §. 66.

Demonstratio.

Manifestum namque est, ducto divisore $-a$ in quotum $+b$, fieri $-ab$ (a). Ergo vicissim, si $-ab$ per $-a$ dividatur, *quotus* erit $+b$ (b).

COROLLARIUM.

85 In divisione igitur, quemadmodum in multiplicatione, eadem signa reddunt $+$; diversa vero $-$.

ANIMADVERSIO II.

86 Quae diximus §. 74, & *sequentibus* de numeris *coefficientibus*, & *exponentibus* in divisione magnitudinum simplicium, intelligenda sunt etiam in divisione magnitudinum complexarum, si ipsarum termini *coefficientibus* quoque, aut *exponentibus* numeris sint affecti. Sic divisa magnitudine $8am + 4mcb^3 + 2ab^2 + cb^5$ per $4m + b^2$, *quotus* erit $2a + cb^3$. Etenim diviso $8am$ per $4m$, *quotus* est $2a$ (c). Ducto autem divisore $4m + b^2$ in *quotientem* $2a$, productum efficitur $8am + 2ab^2$ (d), quo sublato ex tota magnitudine divisa, relinquitur $4mcb^3 + cb^5$. Diviso similiter termino $4mcb^3$ per eundem $4m$, *quotus* habetur cb^3 (e). Facta autem multiplicatione integri divisoris per *quotientem* cb^3, emergit $4mcb^3 + cb^5$ (f); quo subducto ex priori residuo, nihil superest. Ergo *quotus* hujusce divisionis erit $2a + cb^3$.

ANIMADVERSIO III.

87 Si data magnitudo solum ex parte dividi possit, dividatur, quod potest dividi; ei vero, quod superest, quodque dividi nequit, integer divisor subscribatur, ipsaque fractio *quotienti* jam invento adiiciatur, ut in vulgari Arithemetica fieri

(a) §. 55.
(b) §. 66.
(c) §. 74.
(d) §. 51.
(e) §. 72.
(f) §. 45. 46.

fieri solet. Sic divisa magnitudine $ac + cb - da - db + mm - xy$ per $c - d$, *quotus* erit $a + b + \frac{mm - xy}{c - d}$. Etenim facta ultima subductione producti, quod nascitur ex multiplicatione divisoris $c - d$ per quotum $a + b$, relinquitur $mm - xy$, quod non potest dividi per ipsum $c - d$.

A N I M A D V E R S I O IV.

88 Demum si data magnitudo nullatenus dividi possit, divisor, ducta lineola, dividendæ magnitudini subscribatur. Quæ namque hinc efficitur fractio, erit *quotus* quæsitus, ut superiori loco de incomplexis magnitudinibus diximus. Videlicet si magnitudo $a + b$ dividenda sit per $c - d$, scribendum est pro *quoto* $\frac{a+b}{c-d}$

P R O B L E M A III.

Magnitudinem complexam per incomplexam dividere.

Resolutio.

89 Dividantur singuli termini complexæ magnitudinis, perinde ac si essent magnitudines simplices. Tum omnes *quoti* simul sumantur iis mediantibus signis, quæ illis conveniunt. Aggregatum erit *quotus* quæsitus.

Exemplum.

Complexa magnitudo $ab + ad + ac$ dividenda sit per incomplexam a. Quoniam igitur diviso termino ab per a, *quotus* est

est *b*; diviso *ad* per *a*, *quotus* est *d*; & diviso *ae* per *a*, *quotus* est *e* (a), *quotus* totalis erit $b+d+e$.

Demonstratio.

Etenim si divisor *a* multiplicetur per *quotum* $b+d+e$, productum est ipsa magnitudo divisa $ab+ad+ae$ (b). Ergo legitime peracta est ipsa divisio (c).

ANIMADVERSIO.

90 Si divisor nullo signo sit affectus *quotientes* partiales iisdem signis afficiendi sunt, quibus termini divisi *respective* donantur. Si vero signum negativum præfixum habeat, *quotus* termini affecti signo negativo affici debet signo positivo, & vicissim signo negativo, si terminus divisus affectus sit signo positivo. Videlicet *quotus* magnitudinis $ab+ad-ae$ divisæ per magnitudinem *a*, erit $b+d-e$. Est enim *a* idem ac $+a$ (d). Contra vero *quotus* magnitudinis $ab-ad+ae$ divisæ per terminum $-a$, erit $b+d-e$. Ratio hujus regulæ quoad utramque partem patet ex §. 81., & sequentibus.

PROBLEMA IV.

Datæ magnitudinis divisores omnes invenire.

91 Invenire oporteat omnes divisores magnitudinis $aaab+aabb$.

Resolutio.

Primo itaque dividatur data magnitudo per *a*, & *quotus* $aab+abb$ infra ipsam, divisor vero *a* ad illius dexteram scribatur. Quotus $aab+abb$ iterum per *a* dividatur, & ejus *quotiens* $ab+bb$ collocetur infra priorem *quotum* $aab+abb$, divisor

(a) §. 72.
(b) §. 60.
(c) §. 66.

(d) §. 6.

ſor vero a infra primum diviſorem a. Quoniam vero *quotus* $ab+bb$ dividi nequit per a, ſed tantum per b, facta illius diviſione per b, ſtatuatur *quotus* $a+b$ infra terminum $ab+bb$, & diviſor b infra a. Dividatur tandem $a+b$ per ſeipſum, cum per aliam quantitatem dividi nequeat. *Quotus* autem 1. ſcribatur infra ipſum diviſum $a+b$; diviſor vero $a+b$ infra diviſorem b.

$aaab+aabb$	a.
$aab+abb$	$a.\ aa.$
$ab+bb$	$b.\ ab.\ aab.$
$a+b$	$a+b.\ aa+ab.\ aaa+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.$
1	$aaab+aabb.$

Multiplicetur deinde quilibet diviſor inferior per omnes ſuperiores, & producta, ſemel tantum, quæ ſimilia ſunt, ad illius dexteram ſcribantur, videlicet primo a per a, & productum aa ponatur ad dexteram ipſius a. Deinde b primo per a, tum per aa, & fiant producta ab, aab, quæ ad illius dexteram collocentur. Demum $a+b$ primo per a, dein per aa, tum per b, poſtea per ab, poſtremo per aab, & producta illi ad dexteram appingantur, ut patet. Omnes hujuſmodi termini erunt diviſores quæſiti.

Demonſtratio.

Perſpicuum namque eſt, omnes hujuſmodi terminos in data magnitudine $aaab+aabb$ reperiri, prout requiritur, ut diviſoris rationem habeant.

S C H O L I O N.

92 Eadem methodo inveniuntur omnes diviſores dati cujuſvis numeri. Sic omnes diviſores numeri 90. erunt, qui infra B poſiti habentur

90.

90.	B.
45.	2.
15.	3. 6.
5.	3. 9. 18.
1.	5. 10. 15. 30. 45. 90.

Nimirum, ut inveniantur omnes divisores numeri 90, ipsum primo divido per 2, & *quotum* 45 infra ipsum 90, divisorem vero 2 infra B scribo. *Quotum* 45, cum per 2 dividi nequeat, divido per 3, cumque hujusce divisionis *quotiens* sit 15, ipsum 15 scribo infra *quotientem* 45, & divisorem 3 infra divisorem 2. Divido deinde *quotum* 15 iterum per 3, cum per 4 dividi nequeat, atque ipsius *quotum* 5 infra ipsum 15, divisorem vero 3 infra divisorem 3 scribo. Divido tandem *quotum* 5 per 5, utpote per ipsum dumtaxat divisibilem, & divisorem 5 infra divisorem 3 scribo, *quotum* autem 1 infra *quotum* 5. Hac divisione peracta, multiplico divisorem primum 2 per secundum 3, & productum 6. scribo ad illius dexteram. Deinde singulos divisores inferiores per superiores, eorumque facta ad illorum dexteram itidem statuo, iis neglectis in inferioribus lineis, quæ in superioribus jam habentur. Erunt itaque omnes divisores numeri 90, qui infra B reperiuntur.

S E C T I O VI.

De fractionum natura, & calculo.

D E F I N I T I O I.

93 NUmerus *fractus*, qui etiam *fractio*, & *minutia* vocari solet, *dicitur ille, qui refertur ad unitatem, veluti pars ad totum*. Ut si unitas totum aliquod divisibile repræsentans, ponatur divisa in plures partes æquales, ex quibus aliquot in calculo spectentur, numerus indicans, quot ex hisce unitatis particulæ sumtæ sint, *numerus fractus*, sive *fractio* nun-

nuncupatur. Duobus idcirco numeris quævis *fractio* exprimimitur, quorum alter *numerator fractionis* dicitur, alter ejusdem *denominator*.

DEFINITIO. II.

94 *Numerator fractionis est numerus indicans, quot particulæ unitatis sumendæ sint. Denominator vero est numerus, qui, in quot particulas unitas sit divisa, atque adeo quales unitatis partes ipsæ sint, designat.* Ut si unitas ponatur divisa in *quinque partes*, ex quibus *tres* in calculo computentur, numerus 3. erit numerator; numerus vero 5. erit denominator fractionis, qua *tres quintæ partes* unitatis exprimuntur.

HYPOTHESIS I.

95 Ita porro hujusmodi numeri collocantur, ducta nimirum lineola, *numerator* supra, *denominator* infra illam scribitur. Sic ad designandas *tres quintas* partes unitatis, scribitur $\frac{3}{5}$. Ad indicandas *septem* partes *decimas*, scribitur $\frac{7}{10}$; atque ita de ceteris.

COROLLARIUM I.

96 *Denominator fractionis cujuscunque unitatem adæquat.* Refert enim unitatem in plures æquales partes divisam.

COROLLARIUM II.

97 Hinc *si numerator fractionis fuerit æqualis denominatori, fractio erit æqualis unitati. Si fuerit minor, fractio erit minor unitate. Si vero fuerit major, fractio unitatem excedet.* Sic fractio $\frac{3}{3}$ erit $= 1$. Fractio $\frac{2}{3} < 1$. Fractio $\frac{5}{2} > 1$.

SCHO-

SCHOLION.

98 Fractio, cujus numerator denominatorem superat, vel adæquat, *spuria* vocatur. Illa vero, cujus numerator a denominatore deficit, *naturalis* dici solet. Fractionis namque natura in eo posita est, ut aliquot tantum unitatis minutias exhibeat.

COROLLARIUM III.

99 *Quæ pars, vel partes denominatoris est fractionis numerator, eadem pars, vel partes unitatis est ipsa fractio.* Videlicet sicuti numerator 2 fractionis $\frac{2}{3}$ exprimit *duas tertias* partes denominatoris 3, ita fractio $\frac{2}{3}$ *duas tertias* partes unitatis designat.

SCHOLION.

100 *Quotus* propterea unius magnitudinis per aliam divisę optime exprimitur in Algebra per fractionem, cujus numerator sit magnitudo dividenda, denominator vero magnitudo dividens. Quandoquidem hujusmodi fractio eodem plane modo unitatem continet, vel in unitate continetur, quo magnitudo dividenda divisorem continet, vel in illo comprehenditur.

COROLLARIUM IV.

101 *Fractio naturalis eo minor est, quo magis illius numerator a denominatore deficit.* Hoc enim ipso pauciores unitatis particulas exhibet.

COROLLARIUM V.

102 *Quo magis propterea fractionis denominator, eodem manente numeratore, augetur, eo minoris valoris fractio ipsa efficitur.*

citur. Sic fractio $\frac{3}{100}$ minor eſt fractione $\frac{3}{10}$, fractio $\frac{3}{1000}$ fractione $\frac{3}{100}$, atque ita deinceps.

COROLLARIUM VI.

103 *Omnis fractio naturalis poteſt minui in infinitum*. Poteſt enim denominator in infinitum augeri, quin numerator mutetur.

COROLLARIUM VII.

104 *Denominatores fractionum homogenearum æquales ſunt inter ſe, licet numeris inæqualibus exprimantur*. Omnes enim unitatem referunt, quamvis non in totidem ex æquo partes diviſam.

DEFINITIO III.

105 *Fractiones ejuſdem nominis dicuntur illæ, quæ eundem denominatorem habent*; ut fractiones $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, & univerſaliter $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{a}$.

DEFINITIO IV.

106 *Illæ fractiones vocantur diſſimiles, quarum denominatores ſunt inter ſe diverſi*. Hujuſmodi ſunt fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, & univerſaliter $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Ad diſſimilitudinem porro fractionum perinde omnino eſt, ſive eodem, ſive diverſo numero earum numerator exprimatur. Semper enim ſtat, diverſæ indolis eſſe particulas illas unitatis, quas fractiones ipſæ deſignant, & exhibent.

DEFINITIO V.

107 *Duæ fractiones dicuntur ejuſdem valoris, ſeu æquales, cum nu-*

numeratores sunt eadem pars, vel eædem partes suorum denominatorum. Sic duæ fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{16}{24}$ sunt æquales; quia sicuti numerator 2 fractionis $\frac{2}{3}$ exhibet *duas tertias* partes denominatoris 4, ita numerator 16 fractionis $\frac{16}{24}$ *duas tertias* partes continet denominatoris 24. Æquales porro dicuntur; quia easdem, ut patet, unitatis partes designant, licet diversis numeris exprimantur.

DEFINITIO VI.

108 *Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia fractio minimis terminis expressa, illi æqualis efficitur*. Sic fractio $\frac{8}{16}$ reducitur ad minimos terminos, cum illi substituitur fractio $\frac{1}{2}$. Hæc enim illi æqualis est (a), ejusque termini sunt numeri omnium, quibus una pars dimidia unitatis exprimi potest, minimi.

DEFINITIO VII.

109 *Fractio fractionis ea est, cujus denominator numeratorem exhibet alterius fractionis in alias æquales partes divisum, perinde ac si esset unum aliquod totum*. Ut si *tres quadrantes* unitatis, quos designat fractio $\frac{3}{4}$, dividantur in *quinque* partes æquales, ex quibus *duæ* in calculo computandæ sint, fractio $\frac{2}{5}$ hujusmodi particulas exhibens, dicitur fractio fractionis $\frac{3}{4}$.

SCHOLION.

110 Compendii gratia, fractio unitatis dicitur fractio *prima*,

 sive

(a) §. 107.

five *simplex*. Fractio fractionis vocatur fractio *secunda*. Fractio fractionis *secundæ* dicitur fractio *tertia*, atque ita deinceps.

COROLLARIUM.

111 *In omni fractione fractionis denominator est minor unitate*. Is enim fractionem adæquat, quæ est unitate minor. Sic denominator 5 fractionis $\frac{2}{5}$ fractionis $\frac{3}{4}$ est minor unitate, quia exprimit *tres quadrantes* unitatis in *quinque* partes æquales divisos, ex quibus duas importat fractio $\frac{2}{5}$.

DEFINITIO VIII.

112 *Unus numerus alterum metiri dicitur, cum si ex hoc, quoties potest, ille auferatur, nihil relinquitur.* Sic numerus 3 metitur numerum 12, quia si numerus 3 quater subducatur numero 12, nihil superest.

DEFINITIO IX.

113 *Maxima communis duorum numerorum mensura est numerus illorum omnium maximus, qui datos ipsos numeros metiri possunt*. Sic numerus 5 est maxima communis mensura duorum numerorum 20, 25. Quandoquidem inveniri non potest numerus major ipso numero 5, qui duos 20, 25, adæquate metiatur.

HYPOTHESIS II.

114 Denominatores fractionum, quarum calculus instituitur, idem totum referunt in partes divisum.

Prin-

Principium fundamentale.

Fractiones ejusdem nominis ab integris numeris reipsa non differunt.

115 Particulæ namque unitatis, quæ fractionibus ejusdem nominis designantur, sunt sibi mutuo homogeneæ. Cumque earum quælibet sit in se una, si spectentur sine ulla ratione totius, cujus sunt partes, multitudinem unitatum homogenearum constituunt, atque adeo numerum integrum. Id porro magis adhuc perspicuum fiet, si consideremus; numerum quemcumque integrum, qui rem quantam designet, fractum evadere, si majori toto comparetur. Profecto *duo pedes* sunt *duæ quintæ partes* unius *passus*, & *quatuor passus* sunt *duæ tertiæ* partes unius *hexapedæ*. Et hinc est, veteres Mathematicos nullam de fractis numeris mentionem fecisse, quod nempe, ut notat Cl. Volfius (a), eos pro peculiaribus numeris minime habuerint.

PROBLEMA I.

Fractiones dissimiles ad eandem denominationem revocare.

Resolutio.

116 Si duæ sint fractiones ad idem nomen revocandæ, multiplicentur singularum tam numerator, quam denominator per denominatorem alterius. Si vero plures sint, quam duæ singularum numerator, & denominator multiplicentur per productum, quod ex aliarum denominatoribus in se invicem ductis efficitur.

Exemplum I.

Revocandæ sint ad idem nomen duæ fractiones dissimiles

(a) *Ontologia* §. 333

les $\frac{a}{a}$, $\frac{c}{d}$. Multiplicentur igitur tam numerator, quam denominator fractionis $\frac{a}{b}$ per denominatorem d; ficuti etiam tam numerator, quam denominator fractionis $\frac{c}{d}$ per denominatorem b. Erunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{db}$ fractiones quaesitae.

Exemplum II.

Modo revocare oporteat ad idem nomen tres fractiones dissimiles $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Itaque termini fractionis $\frac{a}{b}$ multiplicentur per df factum ex aliarum $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ denominatoribus. Termini fractionis $\frac{c}{d}$ per bf productum, quod fit ex denominatoribus duarum $\frac{a}{b}$ $\frac{e}{f}$ in se ductis. Termini vero fractionis $\frac{e}{f}$ per bd factum ex denominatoribus aliarum $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{d}$. Erunt $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{dbf}$, $\frac{ebd}{fbd}$ fractiones ipsae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ ad idem nomen revocatae.

Demonstratio.

Multiplicando terminos fractionis $\frac{a}{b}$ per integram quantitatem d, toties uterque sumitur, quot unitates in ipsa quantitate d numerantur. Ergo numerator, sive factum ad est eadem pars, vel eaedem partes producti, seu denominatoris bd fractionis $\frac{ad}{bd}$, quae pars, vel partes est numerator a denominatoris b fractionis $\frac{a}{b}$. Quamobrem idem est valor utri-

usque

usque fractionis $\frac{ad}{bd}$, $\frac{a}{b}$ (a). Eandem ob causam erit $\frac{cb}{db}=\frac{c}{d}$, $\frac{adf}{bdf}=\frac{a}{b}$, $\frac{cbf}{dbf}=\frac{c}{d}$, $\frac{ebd}{fbd}=\frac{e}{f}$. Ceterum generalis hujus resolutionis demonstratio tradetur lib. I. *Elementorum*.

PROBLEMA II.

Fractiones simul addere.

Resolutio.

117 Si fractiones dissimiles fuerint, revocentur ad idem nomen (b). Simul dein colligantur earum numeratores, & huic summæ communis denominator subscribatur. Fractio namque hujusmodi erit summa quæsita.

Exemplum.

Fractioni $\frac{d}{e}$ addenda sit fractio $\frac{a}{e}$. Facta numeratorum summa $d+a$, subscribatur illi communis denominator e. Erit fractio $\frac{d+a}{e}$ summa quæsita. Si autem colligendæ simul sint fractiones diversi nominis $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, facta earum reductione ad idem nomen, earum summa erit fractio $\frac{ad+cb}{bd}$,

Demonstratio.

Cum enim fractiones sint ejusdem nominis, ab integris nu-

(a) §. 107.
(b) §. 116.

numeris reipsa non differunt(a). Ergo eodem modo, quo integrorum, earum additio perficienda est, nulla nimirum habita ratione denominatoris, sive totius, cujus partes referunt. Igitur &c.

PROBLEMA III.

Unam fractionem alteri subtrahere.

Resolutio.

118 Revocentur ad idem nomen, si dissimiles fuerint. Tum numerator fractionis subtrahendæ alterius numeratori subducatur, & residuo communis subscribatur denominator. Quæ namque hinc emergit fractio, erit differentia quæsita.

Exemplum.

Fractioni $\frac{a}{b}$ subducenda sit fractio $\frac{c}{d}$. Facta igitur earum reductione ad idem nomen, constitutis nempe fractionibus $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, numerator cb fractionis $\frac{cb}{db}$ subtrahatur fractionis $\frac{ad}{bd}$ numeratori ad, & residuo $ad - cb$ subscribatur communis denominator bd. Erit $\frac{ad-cb}{bd}$ residuum quęsitum.

Demonstratio.

Eadem est cum precedenti.

PRO

(a) § 115.

PROBLEMA IV.

Unam fractionem per aliam fractionem dividere.

Resolutio.

119 Invertantur termini fractionis, per quam alia dividenda est. Deinde numerator unius per alterius numeratorem, & denominator per denominatorem multiplicentur. Fractio ex hisce productis emergens erit *quotus* quęsitus.

Exemplum.

Dividere oporteat fractionem $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$. Invertantur itaque termini fractionis $\frac{c}{d}$, fiat nimirum fractio $\frac{d}{c}$. Tum multiplicato numeratore a fractionis $\frac{a}{b}$ per numeratorem d fractionis $\frac{d}{c}$, & denominatore b per denominatorem c, ex productis ad, bc fiat fractio $\frac{ad}{bc}$. Hęc erit *quotus* fractionis $\frac{a}{b}$ divisæ per fractionem $\frac{c}{d}$.

Demonstratio.

Si fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ reducantur ad idem nomen, fractio $\frac{a}{b}$ mutatur in fractionem $\frac{ad}{bd}$, & fractio $\frac{c}{d}$ in fractionem $\frac{cb}{db}$ (a). Hac autem reductione facta, fractiones ipsæ spe-

ctari

(a) §. 116.

ctari possunt perinde ac si essent quantitates integræ, videlicet particulæ expressæ numeratoribus a, c, sive ad, cb possunt considerari sine ulla comparatione ad denominatores b, d, seu bd (a); atque adeo earum divisio eodem modo fieri debet, quo integrorum divisio perficitur. Fractio autem $\frac{ad}{bc}$ exprimit *quotum* quantitatis ad divisæ per quantitatem bc (b). Ergo hæc ipsa fractio *quotum* designabit fractionis $\frac{a}{b}$ sive $\frac{ad}{bd}$ divisæ per fractionem $\frac{c}{d}$, seu $\frac{cb}{db}$.

COROLLARIUM.

120 Hinc, si fractiones, quarum una per aliam dividenda est, fuerint ejusdem nominis, ad earum divisionem peragendam satis est, ut numeratori fractionis dividendæ alterius numerator subscribatur.

PROBLEMA V.

Fractionem per fractionem multiplicare.

Resolutio.

121 Multiplicentur inter se mutuo tam numeratores, quam denominatores fractionum, quarum una in aliam ducenda est, & ex productis fiat fractio, quæ erit factum quæsitum.

Exemplum.

Ut si multiplicanda sit fractio $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$, productum erit fractio $\frac{ac}{bd}$.

De-

(a) § 115.
(b) §. 70.

Demonstratio.

Etenim divisa fractione $\frac{ac}{bd}$ per fractionem $\frac{a}{b}$, *quotus* est fractio $\frac{acb}{bda}$. Divisa vero per fractionem $\frac{c}{d}$, quotus est fractio $\frac{acd}{bdc}$(a). Constat autem, esse $\frac{acb}{bda} = \frac{c}{d}$, & $\frac{acd}{bdc} = \frac{a}{b}$ (b). Ergo erit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$(c). Alia quoque dabitur hujus operationis demonstratio infra Lib. I.

PROBLEMA VI.

Integram quantitatem ceu fractionem exprimere.

Resolutio.

122 Integræ quantitati subscribatur unitas. Fractio hinc emergens erit fractio quæsita.

Exemplum.

Nimirum ut veluti fractionaria exprimatur integra quantitas a, scribendum est $\frac{a}{1}$.

Demonstratio.

Etenim divisa integra quantitate a per unitatem, *quotus* est ipsa magnitudo a divisa (d).

(a) §. 119.
(b) §. 71.
(c) §. 67.
(d) §. 69.

PROBLEMA VII.

Fractionem per integram quantitatem dividere.

Resolutio.

123 Multiplicetur denominator datæ fractionis per datam integram quantitatem. Fractio hinc facta erit *quotus* fractionis datæ per integram illam quantitatem divisæ.

Exemplum.

Vt si dividere oporteat fractionem $\frac{a}{b}$ per quantitatem d, *quotus* erit $\frac{a}{bd}$.

Demonstratio.

Enimvero cum sit $\frac{d}{1} = d$ (a), & $a \times 1 = a$ (b), *quotus* fractionis $\frac{a}{b}$ divisæ per integram quantitatem d, erit $\frac{a}{bd}$ (c).

PROBLEMA VIII.

Fractionem per integram quantitatem multiplicare.

Resolutio.

124 Numerator fractionis multiplicetur per datam quantitatem, & producto idem denominator subscribatur. Quæ hinc oritur fractio, erit factum quæsitum.

Exem-

(a) §. 65.
(b) §. 57.
(c) §. 119.

Exemplum.

Videlicet factum ex fractione $\frac{a}{b}$ multiplicata per integram quantitatem d, erit fractio $\frac{ad}{b}$.

Demonstratio.

Multiplicare namque fractionem $\frac{a}{b}$ per quantitatem d idem est, ac illam multiplicare per fractionem $\frac{d}{1}$ (a). Est autem $\frac{a}{b} \times \frac{d}{1} = \frac{ad}{1b}$, ut patet. Ergo erit quoque $\frac{a}{b} \times d = \frac{ad}{b}$.

PROBLEMA IX.

Integram quantitatem in fractionem dati nominis convertere.

125 Integra quantitas d mutanda sit in fractionem, cujus denominator sit b.

Resolutio.

Magnitudo d multiplicetur per denominatorem b, & producto db idem b subscribatur. Erit $\frac{db}{b}$ fractio quæsita.

Demonstratio.

Est enim $\frac{db}{b} = d$ (b).

H 2 SCHO-

(a) §. 142.
(b) §. 72.

SCHOLION.

126 Facta conversione integræ magnitudinis in fractionem dati nominis, difficile non erit ex hactenus traditis I. *plures integras magnitudines cum fractionibus in unam summam colligere* II. *fractionem ab integra quantitate, sicuti etiam integram quantitatem cum fractione ab integra cum fractione auferre* III. *integram cum fractione per integram, vel integram cum fractione per integram cum fractione tam multiplicare, quam dividere*. Tunc enim instituitur calculus, ut in fractis.

PROBLEMA X.

Fractionem spuriam ad integram quantitatem reducere.

Resolutio.

127 Numerator per denominatorem dividatur. *Quotus divisionis erit quantitas integra, cui data fractio est æqualis.*

Exemplum.

Ut si *quotus* numeratoris *a* fractionis *spuriæ* $\frac{a}{b}$ divisi per denominatorem *b* fuerit *d*, erit *d* quantitas integra, quam adæquat fractio $\frac{a}{b}$.

Demonstratio.

Cum enim sit $\frac{a}{b}=d$, erit etiam $bd=a$ (a); adeoque &c.

SCHO-

(a) §. 69.

SCHOLION.

128 Si *quotus* hujusce divisionis fuerit integra quantitas cum fractione, fractio ad integram quantitatem reduci minime poterit, sed tantum ad mixtam magnitudinem ex integra & fracta, ut patet de fractione $\frac{25}{3}$, quæ numero mixto $8 + \frac{1}{3}$ est æqualis.

PROBLEMA XI.

Unam fractionem in aliam dati nominis mutare.

129 Fractio $\frac{a}{b}$ mutanda sit in fractionem, cujus denominator sit d, quæque sit ipsi $\frac{a}{b}$ æqualis.

Resolutio.

Multiplicato numeratore a fractionis $\frac{a}{b}$ per datum denominatorem d, productum ad dividatur per denominatorem b ipsius fractionis, cujus divisionis *quotiens* sit x. Ex hoc igitur, & ex dato denominatore d fiat fractio $\frac{x}{d}$, quæ erit fractio quæsita, erit nempe $\frac{x}{d} = \frac{a}{b}$.

Demonstratio.

Cum enim quantitas x adæquet productum $\frac{ad}{b}$, quod fit ex multiplicatione fractionis $\frac{a}{b}$ per integram quantitatem d, divisa quantitate x per magnitudinem d multiplicantem, *quo-*

tus

tus erit ipsa quantitas multiplicata $\frac{a}{b}$ (a). Quamobrem erit $\frac{x}{d} = \frac{a}{b}$.

SCHOLION.

130. Usus hujus reductionis amplissimus est. Eo enim mediante dignoscitur valor fractionis in partibus ejusdem totius, quarum valor est nobis notus. Ut si quæratur, *quot* passus adæquent quatuor quintæ partes unius milliarii, hac methodo palam fiet, partes hujusmodi comprehendere, seu æquare passus 800, cum sit $\frac{4 \times 1000}{5} = \frac{4000}{5} = \frac{800}{1000}$.

PROBLEMA XII.

Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.

131 Fractio $\frac{a}{b}$ fractionis $\frac{d}{e}$ reducenda sit ad fractionem *simplicem*, sive *primam*.

Resolutio.

Muliplicentur inter se mutuo utriusque fractionis tam numeratores, quam denominatores *respective*, & ex productis *ad*, *be* fiat fractio $\frac{ad}{be}$, quæ erit fractio *prima* quæsita.

Demonstratio.

Etenim si ponatur $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, & $\frac{d}{e} = \frac{6}{8}$, erit $\frac{ad}{be} = \frac{12}{24}$. Constat autem, *duos trientes* fractionis primæ $\frac{6}{8}$, quos designat

(a) §. 67.

gnat fractio *secunda* $\frac{2}{3}$, esse $\frac{4}{8}$, sive *semissem* unitatis, ad quam fractio ipsa $\frac{6}{8}$ immediate refertur. Ergo cum sit $\frac{12}{24} = \frac{4}{8}$ (a), fractio $\frac{12}{24}$ erit fractio *prima*, ad quam fractionem *secundam* $\frac{2}{3}$ revocare oportebat. Ceterum generalis hujus resolutionis demonstratio tradetur infra Lib. I. *Elementorum*.

SCHOLION I.

132 Fractio fractionis fractionis eodem modo ad fractionem primam reducitur. Ut si fractio *prima* fuerit $\frac{a}{b}$, *secunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{e}{f}$, fractio ipsa $\frac{e}{f}$ reducitur ad fractionem *prima*, si multiplicatis ex una parte numeratoribus a, c, e, & ex altera denominatoribus b, d, f, ex productis ace, bdf fiat fractio $\frac{ace}{bdf}$.

SCHOLION II.

133 Facta reductione fractionis *secundæ*, *tertiæ*, *quartæ* &c. ad fractionem *simplicem*, earum *additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, & *divisio* eodem artificio peraguntur, quo eædem operationes fiunt in fractionibus simplicibus.

PROBLEMA XIII.

Maximam duorum numerorum mensuram invenire.

134 Dati sint duo numeri 95, 80, quorum maximam communem mensuram invenire oporteat.

Re-

(a) §. 107.

Resolutio.

Minor 80 subducatur, quoties potest, majori 95, sicuti etiam residuum 15 ab ipso minori 80, & hujus residuum 5 a priori residuo 15, *quoties* itidem potest, auferatur; cumque ex hac ultima subtractione nihil supersit, numerus 5 erit maxima communis mensura duorum 95, 80.

Demonstratio.

Cum numerus 5 metiatur per hypothesim numerum 15, & numerus 15 numerum 75, numerus 5 metietur etiam numerum 75, atque adeo etiam numerum 80; cum sit $75 + 5 = 80$, nec non numerum 95, cum habeatur $80 + 15 = 95$. Numerus igitur 5 est mensura communis duorum numerorum 80, 95. Quod vero sit mensura ipsorum maxima, sic ostenditur. Etenim si non: maxima ipsorum mensura sit numerus x major numero 5. Cum ergo numerus x metiatur utrumque numerum 80, 95, metietur etiam numerum 15, quo numerus 95 excedit numerum 80. Constat autem, ex numero 15 *quinquies* sublato a numero 80, superesse 5. Ergo numerus x, sicuti metitur numerum 15, & numerum 80, metiri etiam debet residuum 5. Id autem fieri nequit; cum numerus x positus fuerit major numero 5. Igitur numerus x non erit maxima communis mensura duorum numerorum 80, 95, eandemque ob causam nullus numerus diversus a numero 5 pro maxima mensura duorum 80, 95 statui potest.

PROBLEMA XIV.

Fractionem numericam ad minimos ipsius terminos reducere.

135 Esto fractio numerica $\frac{12}{18}$ ad minimos ipsius terminos reducenda.

Re-

Resolutio.

Inventa, per *problema* præcedens, maxima communis mensura numeratoris 12, & denominatoris 18, scilicet numero 6, uterque terminus 12, 18 per ipsum 6 dividatur. Cumque sit $\frac{12}{6}=2$, $\frac{18}{6}=3$, ex hisce *quotientibus* 2, 3 fiat fractio $\frac{2}{3}$, quæ erit fractio quæsita.

Demonstratio.

Constat enim, numeratorem 2 fractionis $\frac{2}{3}$ esse easdem partes denominatoris 3, quæ denominatoris 18 fractionis $\frac{12}{18}$ est numerator 12. Igitur erit $\frac{2}{3}=\frac{12}{18}$ (a). Ceterum generalis hujus operationis demonstratio tradetur lib. I. *Elementorum*, ubi ostendemus, *quotientes duarum inæqualium magnitudinum per eandem divisarum esse directe inter se, ut ipsa magnitudines divisa.*

S C H O L I U M.

136 Si terminos datæ fractionis sola unitas metiatur, fractio ipsa ad minimos terminos reduci nequit. Quandoquidem *quotus* magnitudinis per unitatem divisæ diversum aliquid non est ab ipsa divisa magnitudine (b).

(a) §. 107.
(b) §. 69.

SECTIO VII.

De variis magnitudinum Algebricarum gradibus, eorumque genesi & analysi.

Cum quævis magnitudo Algebrica possit per aliam, sicuti etiam per seipsam, non tantum semel, verum etiam pluries, prout libuerit, multiplicari, plures magnitudinum Algebricarum gradus in Algebra distinguuntur.

DEFINITIO I.

137 *Magnitudo* unius dimensionis *dicitur illa, sive simplex ea sit, sive complexa, quæ ex aliis in se invicem ductis non consurgit*. Hujusmodi sunt magnitudines a, b, $m + n - x$ &c.

DEFINITIO. II.

138 *Magnitudo* duarum dimensionum *ea est, quæ ex una magnitudine in alteram ducta producitur, dummodo tamen magnitudines se invicem multiplicantes non sint producta ex aliis*. Talis est magnitudo ab, sicuti etiam magnitudo $ac + cb + da + db$. Altera enim ex ductu magnitudinis a in magnitudinem b, altera ex multiplicatione *binomii* $a + b$ per *binomium* $c + d$ efficitur.

SCHOLION.

139 Magnitudo *duarum dimensionum* dicitur etiam *rectangulum Algebricum*, cujus latera vocari solent magnitudines illæ, ex quarum multiplicatione emergit.

DEFINITIO III.

140 *Magnitudo* trium dimensionum *vocatur illa, quæ ex multiplicatio-*

tiplicatione inter se mutuo trium magnitudinum unius dimensionis efficitur. Talis est magnitudo *abc*.

S C H O L I O N.

141 Magnitudines *trium dimensionum* vocantur *parallelepipeda Algebrica*; quorum latera sunt illæ magnitudines, ex quibus in se invicem ductis fiunt.

D E F I N I T I O IV.

142 *Magnitudo* quatuor dimensionum *est illa, quæ ex quatuor magnitudinibus unius dimensionis in se invitem ductis producitur*. Hujusmodi est magnitudo *abcd*. Eodem modo ratiocinare de magnitudinibus *quinque, sex, septem* &c. *dimensionum*: Nihil enim prohibet, quominus hac in re in infinitum progrediamur.

Genesis, & ordo potestatum Algebricarum.

D E F I N I T I O V.

143 *Potestas Algebrica*, quæ etiam *dignitas* dicitur, *est productum, quod fit ex data magnitudine per se ipsam semel, aut bis, vel ter &c. multiplicata*. Quamvis autem *potestates*, sive *dignitates* cujusvis magnitudinis infinitæ prorsus sint, cum illius magnitudinis multiplicatio in infinitum protrahi possit, sex tamen potissimum memorantur, videlicet *radix, quadratum, cubus, quadrato-quadratum, quadrato-cubus*, & *cubo-cubus*. Radix dicitur *potestas prima*, quadratum *potestas secunda*, cubus *potestas tertia*, & sic deinceps.

D E F I N I T I O VI.

144 *Potestas prima est magnitudo quæcunque, ex qua aliquoties in seipsam ducta altera producitur*. Ut si magnitudo *aabb* consideretur quatenus producta ex ductu magnitudinis *ab* in se-

ſeipſam, quantitas *ab* erit *poteſtas prima*, *radix*, ſive *latus* magnitudinis *aabb*.

DEFINITIO VII.

145 *Poteſtas ſecunda, ſive quadratum, eſt factum ex multiplicatione datæ cujuſvis magnitudinis per ſeipſam. Magnitudo vero, ex qua in ſeipſam ſemel ducta quadratum efficitur*, radix quadrata *nuncupatur*. Sic magnitudo *aa* eſt *quadratum*, ſive *poteſtas ſecunda* magnitudinis *a*. Magnitudo vero *a* eſt *radix quadrata* ipſius *aa*.

DEFINITIO VIII.

146 *Poteſtas tertia, ſeu cubus, eſt productum, quod fit ex multiplicatione quadrati per ſuam radicem. Si autem ipſa radix ad hujuſmodi productum referatur, dicitur radix cubica*. Talis eſt magnitudo *aaa*. Fit enim ex ductu *quadrati aa* in ſuam *radicem a* Magnitudo vero *a* vocatur *radix cubica* producti *aaa*.

DEFINITIO IX.

147 *Poteſtas quarta, ſive quadrato-quadratum, eſt productum conſurgens ex multiplicatione quadrati per ſeipſum. Poteſtas quinta, ſeu quadrato-cubus, eſt productum, quod fit ex ductu quadrati datæ quantitatis in ejuſdem cubum. Demum poteſtas ſexta, ſeu cubo-cubus, eſt productum, quod ex ductu cubi in ſeipſum efficitur.* Quantitas *aaaa* eſt *quadrato-quadratum* ſeu *poteſtas quarta* magnitudinis *a*. Quantitas *aaaaa* eſt *quadrato-cubus*, ſive *poteſtas quinta* magnitudinis *a*. Magnitudo vero *aaaaaa* eſt *cubo-cubus*, ſeu *poteſtas ſexta* quantitatis *a*. Ipſa autem quantitas *a* eſt radix *quadrato-quadrata*, ſi ad productum *aaaa*; *quadrato-cubica*, ſi ad productum *aaaaa*; *cubo-cubica*, ſi ad productum *aaaaaa* referatur. Idipſum dicito de *poteſtatibus* magnitudinum complexarum.

SCHO-

SCHOLION.

148 Una eademque magnitudo potest esse potentia superior, simulque inferior, si diversis terminis comparetur. Sic magnitudo *aaaaaa* est *potestas sexta* termini *a*, *tertia* termini *aa*, *secunda* vero termini *aaa*.

DEFINITIO X.

149 *Exponens dignitatis est numerus indicans gradum, ad quem magnitudo, quam afficit, multiplicationis ope evecta est*. Sic *exponens* 2 quantitatis a^2 dicitur *exponens secundæ potestatis*, seu *quadrati* magnitudinis *a*. *Exponens* 3 quantitatis a^3 vocatur *exponens tertiæ potestatis*, sive *cubi* magnitudinis *a*, atque ita deinceps Constat enim, a^2 idem esse ac *aa*, a^3 idem ac *aaa* &c. (a) sicuti etiam *aa* esse *quadratum*, & *aaa cubum* ipsius quantitatis *a* (b).

DEFINITIO XI.

150 *Magnitudinem ad determinatam potestatem elevare est invenire productum, quod factum sit ex ipsa data magnitudine toties in se ducta, quoties ipsa potestas exigit, ut illa in se ducatur*. Sic elevare magnitudinem *b* ad *tertiam potestatem* est invenire *cubum* ipsius magnitudinis *b*. Elevare quantitatem *d* ad *quintam potestatem* est invenire *quadrato-cubum* ipsius *d*, & sic de ceteris.

Propositio I. fundamentalis,

Quadratum magnitudinis binomiæ componitur ex quadrato primi termini, ex duplo ejus, quod fit multiplicando secundum per primum, & ex quadrato secundi termini.

151 Quadratum quantitatis *binomiæ* $a+b$ est $aa+2ab+bb$, ut ex multiplicatione ipsius quantitatis $a+b$ per seipsam palam

(a) §. 46.
(b) §. 141. 146.

lam efficitur. Elementa autem hujus quadrati sunt aa, quadratum primi termini a, $2ab$ duplum producti, quod nascitur ex mutua ipsorum terminorum multiplicatione, & bb, quadratum secundi termini b.

Propositio II. fundamentalis.

Cubus magnitudinis binomiæ componitur ex cubo primi termini, ex triplo ejus, quod producitur multiplicando quadratum primi termini per secundum, ex triplo ejus, quod fit multiplicando quadratum secundi termini per primum, & ex cubo secundi termini.

152. Cubus quantitatis binomiæ $a+b$ est $a^3+2aab+abb+aab+2abb+b^3$ sive, reductis terminis similibus, $a^3+3aab+3abb+b^3$, ut perspicuum fiet, si magnitudo $a+b$ in suum quadratum $aa+2ab+bb$ ducatur. Hæc autem in cubo $a^3+3aab+3bba+b^3$ elementa habentur, videlicet a^3, cubus primi termini a; $3aab$ triplum producti, quod fit ex ductu quadrati aa primi termini a in secundum b; $3abb$ triplum producti, quod oritur multiplicando quadratum bb secundi termini b per primum a; & b^3 cubus secundi termini b. Igitur &c.

Propositio III. fundamentalis.

Quadrato-quadratum magnitudinis binomiæ componitur ex quadrato-quadrato primi termini, ex quadruplo ejus, quod fit multiplicando cubum primi termini per secundum, ex sextuplo ejus quod nascitur multiplicando quadratum primi per quadratum secundi, ex quadruplo ejus, quod fit multiplicando cubum secundi per primum, & ex quadrato-quadrato secundi termini.

153 Quadrato-quadratum magnitudinis binomiæ $a+b$ est

a^4

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4b^3a + b^4$, ut patet. Hujus autem elementa ſunt a^4 quadrato-quadratum primi termini a; $4a^3b$ quadruplum producti, quod oritur ex multiplicatione cubi a^3 ejuſdem primi termini a per ſecundum b; $6a^2b^2$ ſextuplum producti ex quadrato primi termini a ducto in quadratum ſecundi termini b; $4b^3a$ quadruplum facti ex multiplicatione cubi b^3 ſecundi termini b per primum a; & b^4 quadrato-quadratum ſecundi termini b.

COROLLARIUM UNIVERSALE.

154 Cum omnes primi termini magnitudinis pluſquam *binomiæ* conſiderari ac ſumi poſſint inſtar unius, cognitis elementis *ſecundæ*, *tertiæ*, & *quartæ poteſtatis* magnitudinis *binomiæ*, facile erit determinare elementa earundem poteſtatum magnitudinis *polynomiæ*. Sic elementa *ſecundæ poteſtatis* magnitudinis *trinomiæ* $a + b + c$ erunt primo $aa + 2ab + bb$, quadratum duorum priorum terminorum, ſive *binomii* $a + b$ conſiderati perinde ac ſi eſſet una indiviſa magnitudo. Secundo productum $2ac + 2bc$, duplum ejus quod efficitur, multiplicando *binomium* $a + b$ per alterum terminum c. Tertio quadratum cc tertii termini c. Idipſum dicito de aliis poteſtatibus ejuſdem magnitudinis *trinomiæ* $a + b + c$, eodemque modo ratiocinare de poteſtatibus magnitudinum, quæ pluribus adhuc partibus conſtant.

SCHOLION.

155 De elementis *quintæ* & *ſextæ* poteſtatis magnitudinum complexarum nullam mentionem facimus, tum quia raro uſu veniunt; tum quia facili negotio ipſa quoque, ſi opus fuerit, determinari poſſunt.

PRO-

PROBLEMA I.

Elevatio magnitudinis incomplexæ ad suas potestates.

Resolutio.

156 Multiplicetur *exponens* datæ magnitudinis per *exponentem* potestatis, ad quam illa elevanda est. Productum hinc factum erit *exponens* ipsius magnitudinis ad determinatam potestatem evectæ.

Exemplum.

Elevare oporteat magnitudinem a^2 ad *tertiam* potestatem. Quoniam igitur hujus potestatis *exponens* est 3 (a), ductoque *exponente* 2 datæ magnitudinis in *exponentem* 3, efficitur 6, erit a^6 *tertia* potestas magnitudinis a^2 Universaliter si *exponens* magnitudinis datæ, puta b, fuerit n, & *exponens* potestatis, ad quam illa elevanda est, fuerit m, erit b^{nm} potestas quæsita ipsius magnitudinis b^n.

Demonstratio.

Etenim multiplicando *exponentem* datæ magnitudinis per *exponentem* potestatis, magnitudo ipsa toties in se ducitur, quoties opus est, ut fiat productum gradus quæsiti (b). Ergo &c.

COROLLARIUM I.

157 Itaque *duplum exponentis datæ magnitudinis incomplexæ est exponens secundæ potestatis. triplum est exponens tertiæ potestatis. quadruplum est exponens quartæ potestatis ipsius magnitudinis, atque ita deinceps.* Est enim 2 *exponens* secundæ potestatis, 3 *exponens* tertiæ potestatis &c. (c)

CO-

(a) § 149.
(b) §. 150.
(c) §. 149.

COROLLARIUM II.

158 Hinc, ut magnitudo incomplexa, quæ nullo *exponente* affecta est, ad datam potestatem elevetur, sufficit *exponentem* ipsius potestatis illi appingere. Nimirum ut magnitudo *a* elevetur ad *tertiam* potestatem, scribendum est a^3.

SCHOLION.

159 Si data magnitudo sit productum ex dissimilibus literis inter se multiplicatis, ut hujusmodi magnitudo ad datam potestatem elevetur, singularum literarum *exponentes* per *exponentem* ipsius potestatis multiplicandi sunt, quæque fiunt producta, iisdem literis debent appingi. Ut si elevare oporteat productum a^2b^3 ad *secundam* potestatem, scribendum est a^4b^6. Est enim $2\times2=4$, $2\times3=6$.

PROBLEMA II.

Elevare magnitudinem complexam ad secundam potestatem.

Resolutio.

160 I Prima pars ipsius magnitudinis ad quadratum elevetur (a). II. Hujusmodi quadrato adiiciatur duplum producti, quod oritur multiplicando primam partem per secundam. III. Sumatur dein quadratum secundæ partis. IV. Hæc omnia elementa simul in unum colligantur ope signorum, quæ ex legibus multiplicationis illis conveniunt. Summa hinc emergens erit *secunda* potestas quæsita. Si autem magnitudo sit plusquam *binomia*, omnes ipsius partes, quæ sunt ad sinistram, velut una considerentur.

(a) §. 156.

Exemplum I.

Elevanda sit ad *secundam* potestatem magnitudo *binomia* $a+b$. Fiat ergo quadratum aa primę partis a. Tum sumatur duplum producti ex $+a$ in $+b$, scilicet $+2ab$ (a). Deinde quadratum $+bb$ secundæ partis b (b). Summa $aa+2ab+bb$ erit quadratum *binomii* $a+b$.

Exemplum II.

Sit magnitudo *trinomia* $a+b-c$ ad quadratum elevanda. Sumto pro prima parte *binomio* $a+b$, fiat illius quadratum $aa+2ab+bb$ methodo superius tradita. Multiplicato deindè *binomio* $a+b$ per alteram partem $-c$, sumatur duplum hujus producti, scilicet $-2ac-2bc$ (c); ac demum fiat quadratum $+cc$ ejusdem partis $-c$ (d). Aggregatum horum elementorum, eorum signis nullatenus mutatis, nempe $aa+2ab+bb-2ac-2bc+cc$, erit *secunda* potestas *trinomii* $a+b-c$.

Demonstratio.

Patet ex *propositione* I. *fundamentali*.

S C H O L I O N.

161 Cum eadem signa in multiplicatione efficiant $+$ (e), elementa omnia quadrata, quę habentur in *secunda potestate* magnitudinum complexarum, semper afficienda sunt signo $+$.

PRO-

(a) §. 53.
(b) §. 53.
(c) § 60.
(d) §. 56.
(e) §. 57.

PROBLEMA III.

Elevare magnitudinem complexam ad tertiam potestatem.

Resolutio.

162. I. Sumatur *cubus* primæ partis datæ magnitudinis II. Deinde *triplum* producti, quod fit multiplicando quadratum ejusdem partis primæ per secundam. III. Postea *triplum* producti, quod nascitur, multiplicando quadratum secundæ partis per primam. IV. Postremo cubus ejusdem secundæ partis. V. Hisce elementis in unum collectis ope signorum, quæ singulis juxta leges multiplicationis convenire dignoscuntur, quæ inde consurgit summa, erit cubus quæsitus. Si autem magnitudo sit *polynomia*, partes finitimæ habeantur pro una.

Exemplum I.

Esto magnitudo *binomia* $a-b$, quam ad cubum elevare oporteat. Fiat igitur primo cubus a^3 primæ partis a. Tum multiplicato ejusdem quadrato $+aa$ per secundam $-b$, nec non quadrato $+bb$ secundæ partis $-b$ per primam $+a$, sumatur triplum producti $+aa\times-b$, scilicet $-3aab$ (a), sicuti etiam triplum producti $+bb\times+a$, nempe $+3bba$(b); ac demum cubus $-b^3$ secundæ partis $-b$, & fiat horum omnium elementorum collectio, manentibus iisdem signis. Erit aggregatum $a^3-3aab+3bba-b^3$ cubus quæsitus.

Exemplum II.

Elevanda sit ad *tertiam* potestatem magnitudo *trinomia* $a+b-c$. Sumto *binomio* $a+b$ pro parte una, elevetur pars ista ad cubum methodo præcedenti, nempe fiat $a^3+3aab+3bba+b^3$. Quadratum deinde $aa+2ab+bb$ ejusdem $a+b$ multipli-

K 2

(a) §. 54.
(b) §. 53.

tiplicetur per secundam partem $-c$, factoque producto $-aac$ $-2abc-bbc$ (a), sumatur illius triplum $-3aac-6abc-3bbc$. Ducto similiter quadrato $+cc$ partis secundæ $-c$ in partem primam $a+b$, sumatur triplum producti $+acc+bcc$ hinc facti (b), videlicet $+3acc+3bcc$. Ac demum fiat cubus $-c^3$ secundæ partis $-c$. Horum omnium collectio $a^3+3aab+3bba+b^3-3aac-6abc-3bbc+3acc+3bcc-c^3$ erit *tertia* potestas quæsita *trinomiæ* magnitudinis $a+b-c$.

Demonstratio.

Hujus resolutionis demonstratio manifesta est ex *propositione* II. *fundamentali*.

S C H O L I O N.

163 Cubi singularum partium magnitudinis complexæ ad *tertiam* potestatem evectæ, iisdem signis afficiuntur, quibus affectæ sunt ipsæ partes. Enimvero cum earundem partium quadrata affecta semper sint signo positivo $+$ (c), eaque multiplicanda sint per ipsas partes, ut fiant cubi (d), & signa diversa in multiplicatione reddant $-$ (e), cubus partis affectæ signo $-$, eodem quoque signo affici debet, licet illius quadratum signum $+$ præfixum habeat.

P R O B L E M A IV.

Elevare magnitudinem complexam ad quartam potestatem.

Resolutio.

164 I. Fiat quadrato-quadratum primæ partis. II. Sumatur quadruplum producti, quod oritur multiplicando cubum ejusdem partis primę per secundam. III. Tum sextuplum producti

(a) §. 60.
(b) §. 60.
(c) §. 161.
(d) §. 146.
(e) §. 57.

ducti ex multiplicatione quadrati prioris partis per quadratum posterioris. IV. Postea quadruplum facti ex ductu cubi secundæ partis in primam. V. Demum quadrato-quadratum ejusdem partis secundæ. VI. Hisce omnibus elementis in unum collectis, quin signa mutentur, quæ ex legibus multiplicationis illis conveniunt, aggregatum inde consurgens erit *quarta* potestas datæ magnitudinis *binomiæ*. Quod si *polynomia* ipsa fuerit, omnes partes ad sinistram positæ, excepta nimirum ultima ad dexteram, pro una habeantur.

Exemplum.

Esto magnitudo *binomia* $a+b$ ad *quartam* potestatem elevanda. Primo igitur fiat quadrato-quadratum a^4 partis primæ a; tum multiplicato cubo a^3 ejusdem partis per secundam $+b$, sumatur quadruplum facti $+a^3b$, nempe $+4a^3b$; deinde sextuplum facti a^2b^2 ex ductu quadrati $+a^2$ partis prioris in quadratum $+b^2$ partis posterioris, videlicet $+6a^2b^2$; postea quadruplum producti b^3a, quod nascitur ex multiplicatione cubi $+b^3$ partis secundæ $+b$ per primam $+a$, nimirum $+4b^3a$; postremo quadrato-quadratum $+b^4$ ejusdem partis secundæ $+b$. Aggregatum ex hisce omnibus elementis, nempe $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4b^3a+b^4$, erit *quarta* potestas magnitudinis *binomiæ* $a+b$.

Demonstratio.

Deducitur manifeste ex *propositione* III. *fundamentali*.

SCHOLION.

165 Omnia elementa quadrato-quadrata, quæ in *quarta* potestate magnitudinis complexæ reperiuntur, affecta sunt signo positivo $+$. Fiunt enim ex ductu quadrati, quod eodem signo afficitur (a), in seipsum.

PRO-

(a) §. 161.

PROBLEMA V.

Fractiones ad determinatam potestatem elevare.

Resolutio.

166 Tam numerator, quam denominator datæ fractionis elevetur ad propositam potestatem, atque ex hisce productis *respective* fiat fractio, quæ erit potestas quæsita.

Exemplum.

Elevare oporteat fractionem $\frac{a+b}{d}$ ad quadratum. Sumto igitur quadrato $aa+2ab+bb$ numeratoris $a+b$ pro numeratore, & quadrato dd denominatoris d pro denominatore, fiat fractio $\frac{aa+2ab+bb}{dd}$. Hæc erit quadratum fractionis datæ $\frac{a+b}{d}$.

Demonstratio.

Est enim fractio $\frac{aa+2ab+bb}{dd}$ factum ex multiplicatione fractionis $\frac{a+b}{d}$ per seipsam (a). Ergo &c.

Analysis potestatum Algebricarum,

DEFINITIO XII.

167 *Analysis datæ potestatis est ipsius resolutio in suam radicem,*

(a) §. 121.

cem, videlicet *inventio magnitudinis, ex qua aliquoties in seipsam ducta potestas ipsa efficitur*. Sic inventio magnitudinis $a+b$, ex qua semel per seipsam multiplicata fit quadratum $aa+2ab+bb$, dicitur *analysis*, & *extractio* radicis quadratæ ex ipsa magnitudine $aa+2ab+bb$.

DEFINITIO XIII.

168 *Exponens radicis est numerus designans gradum potestatis, ad quam radix ipsa refertur*. Nimirum sicuti *exponens* secundæ potestatis est 2, *exponens* tertiæ potestatis est 3 &c. (a), ita *exponens* radicis quadratæ est 2, radicis cubicæ est 3, atque ita deinceps.

HYPOTHESIS.

169 Radices magnitudinum indicantur signo $\sqrt{\ }$, quod *radicale* idcirco dicitur. Gradus vero radicis per *exponentem* potestatis, ad quam ipsa radix refertur, radicali signo, *exponentis* instar, appictum designatur. Sic $\sqrt[2]{\ }$, vel simpliciter $\sqrt{\ }$ exprimit radicem quadratam, $\sqrt[3]{\ }$ radicem cubicam, $\sqrt[4]{\ }$ radicem quadrato-quadratam, universaliter $\sqrt[m]{\ }$ radicem illius gradus, quem designat *exponens* m. Indicatur itaque radicis extractio præfigendo signum radicale suo *exponente* affectum illi magnitudini, cui radix extrahenda est. Ut si extrahere oporteat radicem quadratam ex magnitudine a, scribitur $\sqrt{a}$; si radicem cubicam, scribitur $\sqrt[3]{a}$, & sic deinceps.

DEFINITIO XIV.

170 Radix cujusvis gradus dicitur *monomia*, si uno tantum

(a) §. 149.

tum

tum termino constet, ut a, vel bd &c. : *binomia*, si duobus, ut $a+b$, aut $d-e$; *trinomia*, si tribus, ut $a+b-c$, universaliter *polynomia*, si plures terminos contineat.

PROBLEMA VI.

Ex magnitudine Algebrica incomplexa radicem cujusvis gradus extrahere.

Resolutio.

171 *Exponens* incomplexæ magnitudinis, cujus radix inquiritur, dividatur per *exponentem* radicis quæsitæ, & *quotus* eidem magnitudini pro *exponente* appingatur. Hæc erit radix quæsita.

Exemplum.

Ut si extrahere oporteat radicem cubicam ex magnitudine a^6, cum *exponens* radicis cubicæ sit 3 (a), divisoque *exponente* 6 per *exponentem* 3, *quotus* sit 2, erit a^2 radix cubica magnitudinis a^6.

Demonstratio.

Cum enim extractio radicis sit operatio contraria formationi potestatum (b), quemadmodum magnitudo incomplexa ad datam potestatem evehitur, multiplicando ipsius *exponentem* per *exponentem* propositæ potestatis (c), ita e contrario radix extrahitur ex ipsa eadem magnitudine, si illius *exponens* per *exponentem* radicis quæsitæ, qui ab *exponente* potestatis, ad quam radix ipsa refertur, diversus non est (d), dividatur. Ergo &c.

CO-

(a) §. 168.
(b) §. 167.
(c) §. 156.
(d) §. 168.

COROLLARIUM.

172 Cum *exponens* radicis quadratæ sit 2, radicis cubicæ sit 3 (a) &c., *radix quadrata datæ magnitudinis incomplexæ erit ipsa eadem magnitudo affecta semisse sui exponentis; radix cubica erit ipsa magnitudo affecta triente sui exponentis; universaliter radix datæ cujusvis magnitudinis incomplexæ erit magnitudo ipsa, cujus exponens sit fractio habens pro numeratore exponentem ipsius magnitudinis, pro denominatore vero exponentem ipsius radicis.* Radix nimirum quadrata magnitudinis a erit $a^{\frac{1}{2}}$, radix cubica $a^{\frac{1}{3}}$, & universaliter radix, cujus *exponens* sit quantitas m, magnitudinis a^n erit $a^{\frac{n}{m}}$. Quamobrem extrahere radicem quadratam ex data magnitudine, puta a^n, perinde est omnino ac ipsam elevare ad potestatem, cujus *exponens* sit $\frac{n}{2}$: extrahere radicem cubicam idem est ac magnitudinem ipsam a^n elevare ad potestatem, cujus *exponens* sit $\frac{n}{3}$, atque ita deinceps.

SCHOLION I.

173 Loco formulæ $\sqrt[2]{a}$, qua exprimitur radix quadrata magnitudinis a, hæc alia $a^{\frac{1}{2}}$ assumi potest. Similiter loco formulæ $\sqrt[3]{a}$, qua radix cubica ejusdem magnitudinis a indicatur, potest hæc alia $a^{\frac{1}{3}}$ assumi, & sic de ceteris. Est enim $a^{\frac{1}{2}}$ radix quadrata, & $a^{\frac{1}{3}}$ radix cubica magnitudinis a (b).

(a) §. 168.
(b) §. 172.

SCHOLION II.

174 Si quotus *exponentis* datę magnitudinis per *exponentem* quæsitæ radicis divisi, fuerit numerus integer, radix ipsa ex data magnitudine exacte elici potest. Si fuerit mixtus ex integro & fracto, radix nequit extrahi nisi ex parte. Si vero fuerit numerus fractus fractione proprie sumta, data magnitudo est hujusmodi, ut radix ex ipsa nullatenus extrahi queat. Sic ex magnitudine a^4 elici potest radix quadrata exacte; quia quotus *exponentis* 4 divisi per *exponentem* 2 est 2. Ex magnitudine vero ipsa a^4 nequit extrahi radix cubica, nisi ex parte; cum sit $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. At vero ex magnitudine a^2 cubica radix elici nullo modo potest, ex eo nimirum, quod diviso *exponente* 2 per *exponentem* 3, quotus sit fractio naturalis $\frac{2}{3}$.

SCHOLION III.

175 Si data magnitudo incomplexa, ex qua radix extrahenda est, fuerit productum ex dissimilibus literis inter se multiplicatis, singularum literarum *exponentes* per *exponentem* radicis quæsitæ sunt dividendi. Ut si quæratur radix quadrata magnitudinis a^4b^6, diviso *exponente* utriusque literæ per 2, radix quæsita erit a^2b^3.

PROBLEMA VII.

Radicem quadratam ex magnitudine complexa extrahere

Resolutio.

176 I. Ex uno, vel altero elementorum quadraticorum datę magnitudinis eliciatur quadrata radix (a). II. Per duplum radicis inventæ ea omnia ejusdem magnitudinis elementa dividantur,

(a) §. 171.

dantur, in quibus radix ipsa reperitur. III. Quotientes adiiciantur eidem radici ope signorum, quæ singulis ex ipso opere divisionis convenire dignoscimus. IV. Hujusmodi aggregatum elevetur ad suum quadratum (a), illudque datæ magnitudini subducatur. Si nihil hinc residuum fuerit, data magnitudo erit quadratum perfectum, ejusque radix erit magnitudo illa complexa ad quadratum evecta. Si vero aliquod remaneat, data magnitudo toto illo residuo mulctanda est, ut fiat quadratum perfectum.

Exemplum.

Extrahenda sit radix quadrata ex magnitudine $aa - 2ab + bb$. Sumta igitur radice quadrata a ex elemento quadrato aa, per illius duplum, scilicet per $+ 2a$, dividatur elementum $- 2ab$, cui illa includitur, & *quotus* $- b$ radici a adiiciatur, fiat nempe $a - b$; cumque nullum aliud elementum extet in ipsa magnitudine, in quo sit radix a, aggregatum $a - b$ elevetur ad quadratum, illudque datæ magnitudini subducatur. Constat autem, hinc nihil relinqui. Igitur magnitudo $aa - 2ab + bb$ erit quadratum perfectum, ejusque radix erit magnitudo *binomia* $a - b$.

Demonstratio.

Patet ex ipsa genesi secundæ potestatis.

PROBLEMA VIII.

Radicem cubicam ex magnitudine complexa extrahere.

Resolutio.

177 I. Eliciatur radix cubica ex uno elementorum cubicorum datæ magnitudinis (b). II. Radix inventa ad quadratum

(a) §. 160. (b) §. 171.

dratum elevetur (a). III. Per triplum hujus quadrati dividantur omnia ipsius magnitudinis elementa, in quibus reperitur. IV. Quoti cum suis signis apponantur radici jam inventæ. V. Aggregatum hujusmodi elevetur ad cubum (b), isque datæ magnitudini subducatur. Si nihil hinc superstes fuerit, data magnitudo erit cubus perfectus, ejusque radix erit aggregatum illud ad cubum evectum. Si vero aliquid remanserit, toto illo residuo magnitudo ipsa mulctanda est, ut perfectus cubus evadat.

Exemplum.

Extrahere oporteat radicem cubicam ex magnitudine $a^3 - 3aab + 3bba - b^3$. Igitur sumta radice cubica a ex elemento cubico a^3, eaque ad quadratum aa evecta, per illius triplum $+3aa$ dividatur elementum $-3aab$, cui includitur, & *quotus* $-b$ radici a adiiciatur. Nullum autem aliud in ipsa magnitudine occurrit elementum, cui illa inexistat. Igitur aggregatum $a-b$ ex radice a, & *quoto* $-b$ elevetur ad cubum, isque datæ magnitudini subtrahatur; cumque hinc nihil remaneat (est enim cubus *binomii* $a-b$ factum $a^3 - 3aab + 3bba - b^3$, ut patet), data magnitudo erit cubus perfectus, ejusque radix cubica erit magnitudo $a-b$.

Demonstratio.

Manifesta est ex ipsa genesi tertiæ potestatis.

PROBLEMA IX.

Ex magnitudine complexa radicem quadrato-quadratam extrahere.

Resolutio.

178 I. Sumatur radix quadrato-quadrata ex uno elemento

(a) §. 156. (b) §. 162.

to quadrato-quadrato datæ magnitudinis (a). II. Radix ista elevetur ad cubum (b). III. Per quadruplum hujus cubi ea omnia ejusdem magnitudinis elementa dividantur, quibus cubus ipse inexistit. IV. *Quoti* ope signorum, quæ illis conveniunt, adiiciantur radici *quadrato-quadratæ* jam inventæ. V. Hujusmodi aggregatum elevetur ad quartam potestatem (c), eaque datæ magnitudini subducatur. Si nihil hinc residuum fuerit, data magnitudo erit *quadrato-quadratum* perfectum, ejusque radix erit illud aggregatum ex radice, & *quotis*. Si vero aliquid ex hac subductione remanserit, magnitudo ipsa toto illo residuo mulctari debet, ut sit *quadrato-quadratum*.

Exemplum.

Esto magnitudo $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4b^3a + b^4$, ex qua radicem *quadrato-quadratam* extrahere oporteat. Sumta igitur ex elemento *quadrato-quadrato* a^4 radice *quadrato-quadrata* a, eaque ad cubum $+a^3$ evecta, per ipsius quadruplum $+4a^3$ dividatur elementum $+4a^3b$, in quo reperitur, atque hujusce divisionis *quotiens* $+b$ radici a adiiciatur. *Binomium* $a+b$ elevetur ad quartam potestatem, eaque subducatur magnitudini datæ. Cum igitur hinc nihil remaneat, data ipsa magnitudo erit *quadrato-quadratum* perfectum, ejusque radix erit *binomium* $a+b$.

Demonstratio.

Manifeste colligitur ex ipsa genesi quartæ potestatis.

COROLLARIUM UNIVERSALE.

179 Si, quæ hactenus dicta sunt, attento animo expendantur, perspecta habebitur generalis methodus extrahendi quamcumque radicem ex complexa magnitudine. Constabit

(a) §. 172.
(b) §. 156.
(c) §. 164.

ſtabit enim, totum artificium in eo conſiſtere. I. *ut ſumatur radix quæſita ex uno, vel altero elementorum datæ magnitudinis, quod ſit poteſtas illius gradus, cujus eſt radix quæſita*, videlicet ſumatur radix quadrata ex elemento quadrato, ſi res ſit de radice quadrata: radix cubica ex uno elemento cubico, ſi de hac ſit ſermo, atque ita deinceps. II. *ut radix hujuſmodi elevetur ad poteſtatem uno gradu minorem illa, quam elementum, cui extracta eſt, oſtendit*, nimirum ad quadratum, ſi extrahenda ſit radix cubica; ad cubum, ſi extrahenda ſit radix quadrato-quadrata &c. III. *ut hujuſmodi poteſtas toties ſumatur, quot unitates numerat exponens elementi, cui radix ad hanc poteſtatem evecta, extracta eſt*, nempe ſumatur *duplum* illius, ſi agatur de extractione radicis quadratæ; *triplum*, ſi de extractione radicis cubicæ &c. IV. *ut per hoc productum tali coefficiente affectum dividantur ea omnia elementa datæ magnitudinis, quibus diviſorem ipſum ineſſe conſpicimus, habita ratione ſignorum, quibus ſingula affecta ſunt*. V. *ut omnes quoti adiiciantur radici primo inventæ ope illorum ſignorum, quæ ex ipſo diviſionis opere ſingulis conveniunt*. Hoc ſiquidem aggregatum erit radix quæſita.

S C H O L I O N I.

180 Si operationes haſtenus traditæ pro radice ex complexa magnitudine extrahenda, executioni mandari nequeant, id argumento eſt, ex data magnitudine radicem ipſam extrahi minime poſſe. Quamobrem radix ipſa indicari debet ope ſigni radicalis $\surd$, ipſum ſcilicet cum ſuo *exponente* magnitudini, cui radix extrahenda eſt, præfigendo; vel neglecto ſigno radicali, *exponentes* integri ſingulorum elementorum datæ magnitudinis mutandi ſunt in fractiones, quarum numerator ſit eorundem *exponens*, denominator vero ſit *exponens* poteſtatis, ad quam quæſita radix refertur, videlicet loco formulæ $\surd\overline{a+b}$, qua indicatur radix quadrata magnitudinis $a+b$, ſcribi poteſt $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}}$, quemadmodum, lo-

loquendo de radice magnitudinum simplicium, superiori loco innuimus (a).

SCHOLION II.

181 Porro si cum viro Cl. Nicolao de Martino (b), *potestatis* nomine ea omnis magnitudo intelligatur, quæ *exponente* aliquo affecta est, duo potestatum genera, habita ratione *exponentium*, distingui possunt, potestates nimirum *perfectæ*, & potestates *imperfectæ*. Potestates *perfectæ* erunt illæ, quarum *exponentes* sunt numeri integri, ut a^2, b^3, & hujusmodi. *Imperfectæ* vero illæ, quarum *exponentes* sunt numeri fracti, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, & hisce similes.

PROBLEMA X.

Radicem cujusvis gradus ex fractionibus extrahere.

Resolutio.

182 Tam ex numeratore, quam ex denominatore datæ fractionis, methodo superius tradita, radix propositi gradus extrahatur; atque ex inventis radicibus *respective* fiat fractio, quæ erit radix quæsita.

Exemplum.

Sic radix quadrata fractionis $\frac{aa-2ab+bb}{dd}$ erit fractio $\frac{a-b}{d}$, cujus numerator $a-b$ est radix quadrata numeratoris $aa-2ab+bb$, & denominator d est radix quadrata denominatoris dd, ut patet.

De-

(a) §. 171.
(b) *Elem. Algebra* Lib. I. cap. 6.

Demonſtratio.

Conſtat enim, eſſe $\frac{a-b}{d} \times \frac{a-b}{d} = \frac{aa-2ab+bb}{dd}$ (a) Ergo &c.

APPENDIX.

De extractione radicis quadratæ, & cubicæ ex quantitate numerica.

DEFINITIO I.

183 *Numerus quadratus vocatur ille, qui oritur ex dato numero ducto in ſeipſum.* Hujuſmodi eſt numerus 16, cum fiat ex numero 4 per ſeipſum multiplicato.

DEFINITIO II.

184 *Radix quadrata dati numeri eſt numerus, ex quo per ſeipſum multiplicato datus ipſe numerus efficitur.* Sic numerus 4 eſt radix quadrata numeri 16.

DEFINITIO III.

185 *Numerus cubicus is eſt, qui fit ex numero quadrato multiplicato per ſuam radicem.* Talis eſt numerus 64, utpote conſurgens ex multiplicatione numeri quadrati 16 per ſuam radicem 4.

DEFINITIO IV.

186 *Radix cubica dati numeri eſt numerus, qui ductus in ſuum quadratum efficit ipſum datum numerum.* Sic numerus 4 eſt

(a) §. 121.

eſt radix cubica numeri 64, cum ſit $4 \times 16 = 64$.

COROLLARIUM.

187 Cum ex unitate, quotieſcunque in ſeipſam ducatur, unitas ſemper prodeat, *unitas eſt ſimul radix, & poteſtas cujuſvis gradus ſui ipſius*, quemadmodum ipſa ſimul numerus eſt, & principium numeri.

Laterculum.

In quo omnium digitorum numeri quadrati, & cubici exhibentur.

188 Quoniam pro extrahenda radice quadrata, & cubica ex quantitate numerica opus eſt, ut omnium digitorum numeri quadrati, & cubici cognoſcantur, eos omnes hic ſubiiciendos cenſui.

Radices.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quadrati.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Cubi.

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Propoſitio I. fundamentalis.

Numerus quadratus una, vel duabus notis numericis conſtans habet radicem unius notæ: duarum, qui tres, vel quatuor notas continet: trium, qui aut quinque, vel ſex notas comprehendit, & ſic deinceps.

189 Patet inductione. Conſtat enim ex ſuperiori laterculo,

lo, numerum quadratum maximi digiti 9 continere duas notas; unam vero dumtaxat numeros quadratos digitorum 1. 2. 3. Conſtat etiam, numerum quadratum radicis 10 tres notas comprehendere; quatuor autem quadratum numeri maximi duarum notarum, ſcilicet 99. Enimvero numerus quadratus primi eſt 100, ſecundi vero eſt 9801, atque ita de ceteris.

Propoſitio II. fundamentalis.

Numerus cubicus una, duabus, vel tribus notis compoſitus habet radicem unius notæ; duarum qui quatuor, quinque, aut ſex notas continet; trium, qui ſeptem, octo, vel novem notas complectitur, & ſic deinceps.

190 Hæc itidem propoſitio inductione manifeſta eſt, ut de præcedenti diximus.

PROBLEMA I.

Ex numero integro radicem quadratam extrahere.

191 Extrahenda ſit *radix quadrata* ex numero 186624.

Reſolutio.

I. Dividatur numerus ipſe in claſſes, initio dextrorſum facto, quarum quælibet binas notas contineat, ut hic patet 18, 66, 24, ultima tamen ad ſiniſtram excepta, quæ ſive unam, ſive duas notas contineat, perinde eſt. Quot igitur erunt claſſes, tot notas quæſita radix comprehendet (a).
II. Sumatur *radix quadrata* ope ſuperioris laterculi ex prima claſſe 18 ad ſiniſtram; quia vero numerus 18 non eſt quadratus, ſpectetur numerus quadratus ipſo numero 18 proxime minor, ſcilicet 16, ejuſque *radix quadrata* 4 ſcribatur

(a) §. 189.

batur post lunulam. Est enim prima nota radicis quæsitæ, sumendo pro prima, quæ ad sinistram primo occurrit. *Hæc porro operatio singularis est, ita nimirum ut non sit iteranda*. III. Quadratus 16 notæ radicalis 4 subducatur ipsi membro 18, & residuum 2 infra illud pro more scribatur. IV. Residuo 2 appingatur classis proxime sequens *66*, ita ut fiat 2*66*, cujus ultima nota *6* neglecta, quod relinquitur 2*6*, dividatur per duplum notæ radicalis hactenus inventæ 4, scilicet per 8, & *quotus* 3 hujus divisionis appingatur notæ priori 4, ut fiat 43. Est enim *quotus* 3 altera nota radicis quæsitæ. V. *Quoto* 3 appicto divisori 8, ita ut emergat 83, multiplicetur numerus ipse 83 per eundem *quotum* 3, & productum 249 hinc factum subtrahatur integræ summæ 2*66*, residuum vero 17 infra illam scribatur. *Hæ duæ postremæ operationes, nimirum IV., & V., in omnibus membris, quæ sequuntur, repetendæ sunt, quotcunque ipsa fuerint*. VI. Residuo 17 adiiciatur altera classis 24, nempe fiat 1724, cujus ultima nota 4 neglecta, quod remanet 172, dividatur per duplum summæ radicalis 43 hactenus inventæ, videlicet per 86, & *quotus* 2 erit ultima nota radicis quæsitæ, ac proinde reliquis 43 adiicienda est, ita ut fiat 432. VII. *Quotus* 2 adiiciatur divisori 86, & aggregatum 862 multiplicetur per eundem *quotum* 2; quodque hinc fit productum 1724, auferatur ex tota summa 1724, ut supra. Cum igitur hinc nihil remaneat, numerus ipse 186624 erit quadratus perfectus, ejusque radix erit 432, quam invenire oportebat.

```
18 , 6 6 , 2 4      ( 4 3 2.
16.
——
 2 6, 6
 2 4 9
——————
   1 7 2. 4.
```

Examen.

Ut autem palam fiat, an radix inventa sit vera *radix*

quadrata dati numeri, multiplicetur per seipsam, & productum ex numero dato auferatur. Si namque hinc nihil remaneat, ut contingit post ultimam subductionem in extractione radicis modo tradita, operatio legitime peracta est, ipsaque radix inventa est radix quæsita. Sic numerus 432 est *radix quadrata* numeri 186624, cum sit $432 \times 432 = 186624$. Radix vero inventa non est vera radix, si res secus contingat.

Demonstratio.

Videatur apud virum eximium P. Andream Tacquetum lib. III. *Arithmeticæ practicæ* cap. 2. Nimis enim prolixa est, quam ut in hac synopsi exhiberi possit.

SCHOLION I.

192 Si facta ultima subductione, aliquod supersit, datus numerus non erit quadratus, sed toto illo residuo mulctandus est, ut quadratus perfectus evadat. Sic numerus 187154 non est quadratus; nam inventa radice 432, factaque subductione producti 1724 ex residuo 2254, relinquitur 530. In examine propterea radicis 432 residuum ipsum 530 adiiciendum est producto quadrato 186624, ut datus numerus emergat.

SCHOLION II.

193 Quoniam vero non omnis integer numerus, cujus *radix quadrata* inquiritur, quadratus est, & numerus carens radice integra, careat etiam fracta (a), sufficit tunc, ut ex hujusmodi numero talis radix extrahatur, quæ ad veram, quo magis fieri potest, accedat. Observandum idcirco est, radicem compositam ex integro numero radicali invento, & ex fractione, cujus numerator sit numerus, qui, radice extracta, relinquitur, denominator vero duplum radicis jam inventæ, esse majorem vera; illam autem esse vera minorem, quæ

(a) De-Chales lib. III. *Arithmeticæ* prop. 4. Wolfius *Elem. Arith.* §. 291.

quæ constat ex numero radicali integro, & ex fractione, cujus numerator sit numerus ille residuus, & denominator duplum numeri radicalis cum unitate sibi adiecta. Ut si *radix quadrata* numeri a sit integer numerus b, & residuum d, *radix quadrata* ipsius a major vera erit $b + \frac{d}{2b}$; radix vero minor vera erit $b + \frac{d}{2b+1}$ (a). Pro determinanda idcirco *radice quadrata*, quæ sit veræ proximior, ratio habenda est non solum numeri radicalis jam reperti, verum etiam numeri, qui, facta ultima subductione, relinquitur. Si namque numerus ille residuus major fuerit radice, aut illi æqualis, radix, quæ a vera deficit, exactior erit. Si autem fuerit minor, radix illa erit veræ proximior, quæ veram excedit. Sic *radix quadrata* exactior numeri 187154 erit $432 + \frac{530}{865}$; cum numerus residuus 530 superet numerum radicalem 432. At vero *radix quadrata* exactior numeri 186635 erit $432 + \frac{11}{864}$, propterea quod residuus numerus 11 deficiat a radice 432.

PROBLEMA II.

Ex numero integro radicem cubicam extrahere.

194 Ex integro numero 12487168 *cubicam* radicem extrahere oporteat.

Resolutio.

I. Datus numerus distribuatur in classes, initio dextrorsum facto, ita ut quælibet tres notas contineat, ultima ad sinistram excepta, quæ duabus, vel etiam una dumtaxat nota

(a) De Chales ibidem prop. 8, & 9.

nota conſtare poteſt, ut hic patet 12,487, 168. Quot enim erunt claſſes, tot erunt notæ in *radice cubica* quæſita (a), ac proinde tribus tantummodo notis conſtabit *radix cubica* numeri dati 12487168, propterea quod nempe in tres tantum claſſes numerus ipſe diſtribui poſſit. II. Ex prima claſſe ad ſiniſtram, videlicet ex numero 12 eliciatur *radix cubica*, ope laterculi ſuperius poſiti; & quia numerus ille cubicus non eſt, ſpectetur cubus illo proxime minor, nempe 8, cujus *radix cubica* 2 erit prima nota radicis quæſitæ, initio ſiniſtrorſum facto, eaque proinde poſt lunulam ſcribatur. III. Cubus ipſe 8 auferatur ex membro 12, & reſiduum 4 infra illud collocetur, eique claſſis proxime ſequens 487, adiiciatur, ut hic patet.

$$\begin{array}{rl} 12,\ 487,\ 168. & (23 \\ 8 & \\ \hline 4\,48,7 & \end{array}$$

Hæc autem operatio, extractio nimirum *radicis cubicæ*, peculiaris eſt primo membro ad ſiniſtram, ita ut in ſequentibus locum non habeat. IV. Quadratum 4 notæ radicalis 2 ter ſumatur, & fiat 12, cui adiiciatur triplum ipſius radicis 2, nempe 6, ut in hac formula

$$\begin{array}{r} 12. \\ 6. \\ \hline 126. \end{array}$$

Tum neglecta ultima nota 7 ſummæ 4487, reſiduum 448 dividatur per 126. Cumque hujus diviſionis quotiens ſit 3, is erit altera nota radicis quæſitæ, atque adeo priori jam inventæ 2 ad dexteram adiiciatur. V. Hæc nota radicalis 3 multiplicet 12, triplum ſcilicet quadrati 4 notæ prioris 2, & efficiat 36. Quadratum 9 ejuſdem notæ poſterioris 3 ducatur in 6 triplum notæ radicalis 2, & fiat 54. Ipſa quoque nota 3 elevetur ad ſuum cubum 27. Tum hæc omnia producta diſponantur, ut hic patet

(a) §. 190.

36.
54.
27

4167.

quæque hinc emergit summa 4167 auferatur ex toto membro 4487, & residuum 320 illi subscribatur. VI. Residuo 320.

4487.
4167.

32016, 8.

adiiciatur altera classis 168, & fiat summa 320168, cujus ultima nota 8 neglecta, residuum 32016 dividatur per summam 15939, quæ consurgit ex numero 1587, nempe triplo quadrati 529 radicis hactenus inventæ 23, ex numero 69, triplo scilicet ipsius radicis 23, ut in hac formula dispositis

1587. (232
69

15939.

& quotus 2 hujus divisionis erit postrema nota radicis quæsitæ, eaque propterea post lunulam scribatur, ita ut tota *radix cubica* sit 232. VII. Nota radicalis 2 modo inventa multiplicet 1587 triplum quadrati radicis 23, & efficiat productum 3174. Triplum ejusdem radicis 23, scilicet 69 ducatur in 4, quadratum nempe notæ radicalis 2 ultimo repertę, & fiat 276, ipsaque nota radicalis 2 elevetur ad suum cubum 8. Tum hæc tria producta, ut in hac formula, collocentur

3174.
276.
8.

320168.

quæque hinc oritur summa, ex toto membro 320168 subducatur; & quoniam hinc nihil superest, datus ipse numerus erit cubus perfectus, ejusque *radix cubica* erit 232, quæ fuerat quæsita. Porro operationes V., & VI. in omnibus mem-

membris, quæ sequuntur, repetendæ sunt, quotcunque illa fuerint.

Examen.

Radix inventa elevetur ad suum quadratum, isque multiplicetur per ipsam radicem. Si radix legitime extracta fuerit, quod hinc oritur productum, erit numerus ipse datus. Sic numerus 232 est *radix cubica* dati numeri 12487168, cum jam sit $232 \times 232 = 53824$, & $53824 \times 232 = 12487168$.

Demonstratio.

Luculenter traditur a P. Tacqueto lib. III. *Arithmeticæ practicæ* cap. 4, apud quem videatur.

SCHOLION I.

195 Si post ultimam subductionem numerus aliquis superfit, datus numerus non erit cubus perfectus, sed toto illo excessu perfectum cubum excedit. Hujusmodi porro excessus adjungi debet numero cubico radicis inventæ, ut palam fiat, an radix quæsita, quemadmodum diximus de radice *quadrata*, legitime extracta fuerit.

SCHOLION II.

196 Ut autem numeri non cubici, puta 12487268, *radix cubica* exactior, quo fieri potest, extrahatur, radix inventa 232 elevetur ad quadratum 53824, cui adiiciatur ipsa radix 232, & fiat summa 54056. Hæc summa multiplicetur per 3, & producto hinc facto 162168 addatur unitas. Tum ex numero 100, qui relinquitur, extracta radice 232, veluti numeratore, & ex summa $162168 + 1$, seu 162169 veluti denominatore, fiat fractio $\frac{100}{162169}$, quæ addiiciatur radici inventæ

ventæ 232. Aggregatum $232 + \frac{100}{162169}$ erit radix *cubica* numeri non cubici 12487268 veræ proximior (a).

PROBLEMA III.

Ex numero fracto radicem quadratam, & cubicam extrahere.

Resolutio.

197 Extrahatur radix quæsita tam ex numeratore, quam ex denominatore datæ fractionis, atque ex ipsis radicibus fractio constituatur, quæ erit radix quæsita.

Exemplum.

Sic radix *quadrata* fracti numeri $\frac{9}{25}$ erit fractio $\frac{3}{5}$, cujus numerator 3 est radix *quadrata* numeratoris 9, & denominator 5 est ipsa eadem radix denominatoris 25. Fractio similiter $\frac{2}{3}$ erit radix *cubica* fractionis $\frac{8}{27}$. Est enim numerator 2 radix *cubica* numeratoris 8, & denominator 3 denominatoris 27.

Demonstratio.

Patet ex ipsa multiplicatione radicis per seipsam, & per suum quadratum.

(a) Videatur P. De-Chales lib. III. *Arith.* prop. 24.

SCHOLION.

198 Si termini datæ fractionis hujusmodi non fuerint, ut quæsita radix ex ipsis extrahi possit, fractio ipsa ad minimos terminos revocanda est. Plerumque enim accidit, ut minimi termini sint potestas perfecta illius gradus, ad quam radix ipsa refertur. Profecto quadrati non sunt termini fractionis $\frac{12}{27}$. Si tamen fractio ad minimos terminos revocetur, fit fractio ejusdem valoris, cujus termini sunt numeri quadrati, nimirum fractio $\frac{4}{9}$, cujus radix *quadrata* est fractio $\frac{2}{3}$. Termini similiter fractionis $\frac{24}{81}$ non sunt cubici, cujusmodi tamen sunt termini fractionis $\frac{8}{27}$, quæ est ipsa fractio $\frac{24}{81}$ ad minimos terminos reducta.

SECTIO VIII.

Calculus quantitatum radicalium.

DEFINITIO I.

199 Quantitates radicales, *sive* irrationales *dicuntur illæ, quæ vulgaribus numeris exprimi nequeunt, quatenus nulla assignari potest pars, quæ eas omnes adæquate metiatur*. Talis est radix *quadrata* numeri 8. Hæc enim nullo numero exprimi potest, propterea quod nempe nulla sit pars communis numero 8, ejusque radici *quadratæ*. Id genus ergo sunt in Algebra omnes illæ magnitudines, quæ exprimuntur præfigendo illis signum radicale $\sqrt{\ }$, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt[m]{ab+dx}$, &c. quæque *potestates imperfectæ* vocantur. Hæ porro vel *reales* sunt, vel *imaginariæ*, seu *repugnantes*.

DE-

DEFINITIO II.

200 *Quantitates radicales reales sunt illæ, quæ licet numeris exprimi nequeant, lineis tamen designari possunt*. Hujusmodi est radix *quadrata* numeri 8, si ad radicem *quadratam* numeri 4 referatur. Quandoquidem radix illa potest linea designari; cum unicuique constet, quadratum unius lineæ posse esse duplum alterius, quamvis in numeris id haudquaquam contingat.

DEFINITIO III.

201 *Quantitates radicales immaginariæ sunt illæ, quæ neque lineis, neque numeris possunt exprimi*. Talis est radix *quadrata* magnitudinis $-a$. Enimvero cum $+$ per $+$ efficiat $+$ (a), sicuti etiam $-$ per $-$ (b), repugnat quantitas, quæ ducta in seipsam producat quantitatem $-a$. Etenim hujusmodi quantitas neque positiva esse potest, neque negativa,

DEFINITIO IV.

202 *Quantitates radicales vocantur ejusdem nominis, cum in illis omnibus idem est exponens signi radicalis; diversi nominis vero, cum earum exponentes sunt diversi*. Sic ejusdem nominis sunt quantitates *radicales* $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[2]{de}$, quia idem est utriusque *exponens* 2. Contra vero diversi nominis quantitates *radicales* $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[3]{de}$.

COROLLARIUM.

203 Cum quantitates *radicales* spectari possint veluti potestates imperfectæ, *illæ quantitates radicales erunt ejusdem nominis, quarum exponentes sunt fractiones ejusdem denominationis. Illæ vero erunt diversi nominis, quarum exponentes sunt fra-*

N 2 *ctiones*

(a) §. 53.
(b) §. 56.

ctiones dissimiles. Ejusdem nempe nominis sunt quantitates *radicales*, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, & universaliter $a^{\frac{n}{m}}$, $b^{\frac{r}{m}}$; diversi vero nominis quantitates *radicales* $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, & universaliter $a^{\frac{n}{m}}$, $b^{\frac{r}{p}}$.

HYPOTHESIS I.

204 *Coefficientes* quantitatum *radicalium* signo radicali præfiguntur, ita nimirum ut $3\sqrt{a}$ idem sit ac $\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}$, $4\sqrt[3]{ad}$ idem omnino ac $\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}$. Universaliter $a\sqrt{de}$ exprimit, quantitatem *radicalem* $\sqrt{de}$ toties sumendam esse, quot unitates in quantitate a numerantur.

Propositio fundamentalis.

Si duæ potestates ejusdem gradus inter se multiplicentur, productum hinc emergens erit potestas ejusdem gradus illius magnitudinis, quæ ex illarum radicibus inter se multiplicatis consurgit.

205 Ut si radix a quadrati aa multiplicetur per radicem b quadrati bb, factum ab erit radix *quadrata* producti $aabb$, quod efficitur multiplicando quadratum aa per quadratum bb. Similiter si cubus a^3 multiplicetur per cubum b^3, factum ex radice a cubi a^3 ducta in radicem b cubi b^3, scilicet ab, erit radix *cubica* producti $\overline{ab}^3$. Idipsum dicito de aliis quibuscunque potestatibus.

Demonstratio.

Constat enim, *quadratum* producti ab esse $abab$, sive $aabb$, ejusdem vero cubum esse $\overline{ab}^3$ (a). Ergo &c.

PRO-

(a) §. 145.146.

PROBLEMA I.

Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.

Resolutio.

206 Extrahatur radix a signo radicali denominata ex illa parte datæ magnitudinis, ex qua potest extrahi, ipsaque radix ante signum radicale, quæ vero superest, quantitas post ipsum signum collocetur.

Exemplum.

Esto magnitudo radicalis $\sqrt[2]{aadm}$ ad simpliciorem expressionem reducenda. Quoniam igitur radix *quadrata* denominata a signo radicali $\sqrt[2]{}$ elici potest ex parte aa ipsius magnitudinis, hæc ex illa extrahatur. Radix ipsa a ponatur ante signum, post illud vero quantitas residua dm, nempe fiat $a\sqrt[2]{dm}$. Erit $a\sqrt[2]{dm} = \sqrt[2]{aadm}$.

Demonstratio.

Cum enim $aadm$ sit factum ex ductu quadrati aa in quantitatem dm, si quantitas p ponatur radix quadrata magnitudinis dm, erit ap radix quadrata totius producti $aadm$ (a). Est autem $a\sqrt[2]{dm} = ap$ (b). Ergo erit $a\sqrt[2]{dm} = \sqrt[2]{aadm}$.

SCHOLION I.

207 Ut palam fiat, an reductio quantitatis radicalis propositæ ad suam simpliciorem expressionem legitime peracta fuerit, quantitas ante signum posita ad eam dignitatem ele-

(a) §. 205.
(b) §. 204.

elevetur, quam ſignum ipſum denominat, ipſaque poteſtas in eam quantitatem ducatur, quæ ſub ſigno reperitur. Si enim, quod hinc fit, fuerit quantitas radicalis data, optime peracta erit reductio. Secus vero, ſi hujuſmodi productum fuerit ab ipſa quantitate diverſum. Sic magnitudo radicalis $\sqrt{aadm}$ ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem redacta dat $a\sqrt{dm}$; quia, ſi quadratum aa quantitatis a ante ſignum poſitæ multiplicetur per $\sqrt{dm}$, quæ ſub ſigno exiſtit, habetur $\sqrt{aadm}$.

SCHOLION II.

208 Si facta reductione plurium quantitatum radicalium ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem, eadem quantitas ſub ſigno radicali remaneat, quantitates ipſæ radicales dicuntur *communicantes*, ſuntque *directe* inter ſe, ut quantitates, quæ extra ſignum reperiuntur. *Communicantes* nimirum ſunt quantitates radicales $\sqrt{aab}$, $\sqrt{ddb}$; cum facta reductione, habeatur $a\sqrt{b} = \sqrt{aab}$, $d\sqrt{b} = \sqrt{ddb}$, eſtque radicalis $\sqrt{aab}$ ad radicalem $\sqrt{ddb}$, ut a ad d.

SCHOLION III.

209 Ut innoteſcat, num quantitas radicalis complexa ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poſſit, quantitatem ſcilicet contineat, ex qua extrahi queat radix a ſigno denominata, omnes illius diviſores inquirendi ſunt (a). Si enim horum aliquis fuerit poteſtas, quam radicale ſignum denominat, data magnitudo ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poterit. Secus vero, ſi nullus illorum fuerit dignitas ab *exponente* ſigni radicalis denominata. Ut ſi ad ſimpliciorem expreſſionem reducenda ſit quantitas radicalis $\sqrt{a^3 + 3aab + 3bba + b^3}$, cum $aa + 2ab + bb$ ſit unus ex diviſoribus datæ ipſius quantitatis, atque ex ipſo $aa + 2ab + bb$ ſumi queat radix a ſigno $\sqrt{}$ indicata, nempe $a + b$; erit $\overline{a+b}\sqrt{\overline{a+b}}$ quantitas ipſa $\sqrt{a^3 + 3aab + 3bba + b^3}$ ad ſimpliciorem expreſſionem reducta.

PRO-

(a) §. 91.

PROBLEMA II.

Quantitates irrationales diversi nominis ad eandem denominationem revocare.

Resolutio.

210 Spectentur quantitates ipsæ irrationales sub formulà potestatum imperfectarum, earumque proinde *exponentes* fractionarii ad idem nomen reducantur (a): qua reductione facta, quantitates ipsæ iterum ponantur sub signis radicalibus, ea quidem lege, ut *exponens* signorum sit communis ipsarum fractionum denominator, *exponentes* vero ipsarum quantitatum sint earundem fractionum numeratores.

Exemplum.

Reducere oporteat ad idem nomen magnitudines radicales $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$. Quoniam igitur $\sqrt[2]{a}$ idem est ac $a^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[3]{b}$ idem ac $b^{\frac{1}{3}}$ (b), fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, fiant nempe fractiones $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$. Erunt $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{b^2}$ quantitates ipsæ $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem revocatæ.

Demonstratio.

Cum enim sit $a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$, & $b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{6}}$ ob similitudinem scilicet fractionum $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$, nec non fractionum $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, erit $\sqrt[2]{a} = \sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b^2}$.

ANI-

(a) §. 116.
(b) §. 171.

ANIMADVERSIO.

211 Si quantitates radicales ad eandem denominationem revocandæ, fuerint producta ex dissimilibus literis inter se multiplicatis, diversoque *exponente* affectis, cujusmodi sunt radicales $\sqrt[4]{a^2d^3}$, $\sqrt[3]{b^2m}$, singula ipsarum elementa ad eandem denominationem revocari debent. Videlicet ut ad idem nomen reducantur radicales propositæ, consideranda est radicalis $\sqrt[4]{a^2d^3}$ sub formula $a^{\frac{2}{4}}d^{\frac{3}{4}}$, & radicalis $\sqrt[3]{b^2m}$ sub formula $b^{\frac{2}{3}}m^{\frac{1}{3}}$. Reductis ergo ad idem nomen *exponentibus* fractionariis, ita nimirum ut fiat $\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$, $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$, habebitur $\sqrt[12]{a^6d^9}=\sqrt[4]{a^2d^3}$, & $\sqrt[12]{b^8m^4}=\sqrt[3]{b^2m}$.

Calculus radicalium simplicium.

DEFINITIO V.

212 *Quantitates radicales dicuntur* simplices, *sive* incomplexæ, *item* monomiæ, *cum unus tantum est earum terminus signo radicali affectus*, ut $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$ &c.

PROBLEMA III.

Quantitates irrationales simplices simul addere.

Resolutio.

213 Reducantur ad simpliciorem expressionem (a), sique communicantes fuerint, collectis in unum, quæ sunt ante signum,

(a) §. 206.

ſignum, ſumma quantitati ſub ſigno poſitæ, veluti illius *coefficiens* præfigatur. Si vero communicantes non fuerint, fiat earum collectio ope ſigni $+$, perinde ac ſi eſſent rationales.

Exemplum.

Ut ſi magnitudo radicalis $\sqrt{bbd}$ adiicienda ſit radicali $\sqrt{aad}$, cum facta reductione, habeatur $\sqrt{aad} = a\sqrt{d}$, & $\sqrt{bbd} = b\sqrt{d}$, ſumma erit $\overline{a+b}\sqrt{d}$. Summa quoque ex radicali $\sqrt{bbd}$ adiecta radicali $\sqrt{aae}$ erit $a\sqrt{e}+b\sqrt{d}$.

Demonſtratio.

Cum enim, facta reductione, quantitates ante ſignum poſitæ ſint *coefficientes* earum, quæ ſub ſigno reperiuntur (a), facta *coefficientium* ſumma, hęc quantitati ſub ſigno poſitæ præfigi debet, ſi fuerint *communicantes*; quemadmodum diximus §. 18. de additione rationalium ſimilium, quæ *coefficientibus* ſunt affectæ. Si autem *communicantes* non fuerint, tractari debent, ut rationales diſſimiles, quæ *coefficientibus* itidem ſunt affectæ; adeoque &c.

PROBLEMA IV.

Quantitatem irrationalem ſimplicem alteri ſubtrahere.

Reſolutio.

214 Facta illarum reductione ad ſimpliciorem expreſſionem, ſi fuerint *communicantes*, quantitas ante ſignum radicalis ſubtrahendæ ſubducatur quantitati, quæ itidem ante ſignum quantitatis habetur, cui fieri debet ſubtractio, & reſiduum eidem quantitati ſub ſigno poſitæ præfigatur. Si vero *communicantes* non fuerint, fiat ſubtractio ope ſigni $-$, perinde ac ſi eſſent rationales.

(a) §. 204.

Exemplum.

Ut si subtrahenda sit radicalis $\sqrt{bbd}$ radicali $\sqrt{aad}$, facta reductione, scribendum est pro residuo $\overline{a-b}\sqrt{d}$. Si autem fieri debeat subtractio quantitatis $\sqrt{bbd}$ quantitati $\sqrt{aae}$, scribendum est $a\sqrt{e}-b\sqrt{d}$.

Demonstratio.

Manifesta est ex dictis §. 28. de subtractione magnitudinum rationalium, quæ *coefficientibus* affectæ sunt, loquendo de radicalibus *communicantibus*. Si autem de radicalibus non *communicantibus* loquamur, patet ex ipsa natura signi —, quo simul junguntur.

PROBLEMA V.

Quantitates irrationales simplices multiplicare.

Resolutio.

215 Si fuerint diversæ denominationis, revocentur ad eandem (a). Tum facta multiplicatione quantitatum, quæ sub signo radicali habentur, perinde ac si essent rationales, producto præfigatur signum radicale cum suo *exponente*.

Exemplum.

Factum nempe ex radicali $\sqrt{a}$ multiplicata per radicalem $\sqrt{b}$ erit $\sqrt{ab}$.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 205.

Ani-

(a) §. 210.

ANIMADVERSIO I.

216 Si factum ex radicalium multiplicatione fuerit talis magnitudo, ut ex illa radix a signo indicata elici queat, radix hujusmodi erit factum quæsitum, ut proinde sola signi radicalis abiectione tunc multiplicatio fiat. Sic factum ex multiplicatione radicalis $\sqrt{a}$ per radicalem $\sqrt{a}$, erit magnitudo a. Est enim $\sqrt{aa}=a$. Id porro perspicuum adhuc fiet, si quantitas $\sqrt{a}$ spectetur, ut potestas imperfecta, nimirum si formulæ $\sqrt{a}$ hæc alia substituatur $a^{\frac{1}{2}}$. Manifestum namque est, tunc haberi $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$, sive $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(a)=a$.

ANIMADVERSIO II.

217 Si quantitates radicales *coefficientibus* affectæ sint, hi multiplicari inter se mutuo debent, & factum signo radicali, veluti *coefficiens* quantitatis sub signo positæ, præfigi. Ut si multiplicanda sit quantitas $a\sqrt{b}$ per quantitatem $d\sqrt{m}$, productum erit $ad\sqrt{bm}$. Patet ex §. 44.

ANIMADVERSIO III.

218 Si quantitas radicalis multiplicanda sit per quantitatem rationalem, hæc signo radicali præfigatur. Sic factum ex ductu radicalis $\sqrt{b}$ in quantitatem rationalem a erit $a\sqrt{b}$. Manifesta est ex §. 45.

PROBLEMA VI.

Magnitudines irrationales simplices dividere.

Resolutio.

219 Facta earum reductione ad idem nomen, si diversæ deno-

(a) §. 46.

denominationis fuerint (a), dividantur quantitates sub signo positæ, perinde ac si essent rationales, & *quoto* signum radicale cum suo *exponente* præfigatur.

Exemplum.

Ut si dividenda sit radicalis $\sqrt{ab}$ per radicalem $\sqrt{a}$, *quotus* erit $\sqrt{b}$.

Demonstratio.

Quandoquidem habetur $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (b). Ergo $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}$ (c).

ANIMADVERSIO I.

220 Si *quotus* fuerit hujusmodi quantitas, ut ex illa extrahi possit radix a signo denominata, radix ista erit *quotus* divisionis. Nimirum cum *quotus* radicalis $\sqrt{ab^2}$ divisæ per $\sqrt{a}$ sit $\sqrt{b^2}$ (d), sitque $\sqrt{b^2} = b$ (e), erit radix b *quotus* radicalis $\sqrt{ab^2}$ per radicalem $\sqrt{a}$ divisæ.

ANIMADVERSIO II.

221 Si *quotus* fuerit fractio observandum est, num ex numeratore, vel denominatore ipsius fractionis, aut ex utroque elici possit radix a signo radicali indicata. Si enim ex utroque termino radix hujusmodi summi queat, eliciatur; tum ex hisce radicibus fiat fractio, neglecto signo radicali, quæ erit *quotus* quæsitus. Si autem ex altero ipsorum terminorum dumtaxat radix ipsa sumi possit, ex illo extrahatur; illi vero, cui nequit extrahi, relinquatur signum radicale, eritque hujusmodi fractio *quotus* divisionis. Videlicet quoniam divisa

(a) §. 210.
(b) §. 215.
(c) §. 66.
(d) §. 219.
(e) §. 216.

divisa radicali $\sqrt{ab^2}$ per radicalem $\sqrt{ad^2}$, *quotus* est fractio $\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{d^2}}$ (a), ex cujus terminis potest sumi radix quadrata, quam indicat signum $\surd$, *quotus* hujusce divisionis erit fractio $\frac{b}{d}$, facta nimirum ex radicibus terminorum b^2, d^2. Constat enim, $\sqrt{b^2}$ idem esse ac b, quemadmodum $\sqrt{d^2}$ idem ac d. Quoniam vero *quotus* radicalis $\sqrt{ab^2}$ divisæ per radicalem $\sqrt{ad}$ est fractio $\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{d}}$, ex cujus numeratore potest sumi radix a signo denominata, *quotus* hujusce divisionis erit fractio $\frac{b}{\sqrt{d}}$.

ANIMADVERSIO III.

222 Si quantitates radicales, quarum una per aliam dividenda est, dissimiles omnino inter se fuerint, quantitati dividendæ ea, per quam dividi debet, ducta lineola, subscribatur, perinde ac de rationalibus dissimilibus dictum est (b), totique fractioni, vel utrique termino seorsim, radicale signum præfigatur. Ut si dividere oporteat radicalem $\sqrt{a}$ per radicalem $\sqrt{b}$, scribendum est $\sqrt{\frac{a}{b}}$, vel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

ANIMADVERSIO IV.

223 Si quantitates sub signo positæ *coefficientibus* numeris affectę fuerint, hi quoque dividi debent, & *quotus* ex divisione *coefficientium* debet præfigi signo radicali quotientis geniti ex divisione radicalium. Sic divisa radicali $6\sqrt{ab}$ per radicalem $2\sqrt{b}$, *quotus* erit $3\sqrt{a}$. Est enim $2\sqrt{b} \times 3\sqrt{a} = 6\sqrt{ab}$ (c).

ANI-

(a) §. 71.
(c) §. 217.
(b) §. 70.

Animadversio V.

224 Si dividere oporteat quantitatem radicalem per rationalem, vel rationalem per radicalem, quantitas rationalis elevetur ad potestatem denominatam a signo quantitatis radicalis, ipsaque potestas sub signo collocetur, ut nimirum veluti radicalis tractari possit, & tunc fiat earum divisio perinde ac si essent radicales. Ut si dividenda proponatur radicalis $\sqrt{ab^2}$ per rationalem b, facta elevatione rationalis b ad quadratum b^2, eaque sub signo posita, dividi debet $\sqrt{ab^2}$ per $\sqrt{b^2}$. Similiter si dividenda sit rationalis a per radicalem $\sqrt{b}$, evecta quantitate a ad quadratum, eique præfixo signo radicali, ita nimirum ut fiat $\sqrt{a^2}$, fieri debet divisio ipsius $\sqrt{a^2}$ per $\sqrt{b}$. Ratio est evidens; cum nempe sit $\sqrt{b^2} = b$, & $\sqrt{a^2} = a$.

PROBLEMA VII.

Quantitatem irrationalem incomplexam ad datam potestatem elevare.

Resolutio.

225 Quantitas irrationalis ad datam potestatem evehenda spectetur sub formula potestatis imperfectæ, ejusque *exponens* fractionarius ducatur in *exponentem* potestatis, ad quam data quantitas evehenda est, perinde ac si esset rationalis.

Exemplum.

Ut si ad tertiam potestatē elevare oporteat radicalem $\sqrt{a}$, spectata $\sqrt{a}$ sub formula $a^{\frac{1}{2}}$, cum *exponens* tertiæ potestatis sit 3, sitque $\frac{1\times3}{2} = \frac{3}{2}$, erit $a^{\frac{3}{2}}$, sive $\sqrt{a^3}$ potestas tertia radicalis $\sqrt{a}$.

De-

Demonstratio.

Patet ex dictis de formatione potestatum quantitatis rationalis incomplexæ.

PROBLEMA VIII.

Radicem extrahere ex quantitate irrationali incomplexa.

Resolutio.

226 Spectata quantitate proposita sub formula potestatis imperfectæ, illius *exponens* fractionarius dividatur per *exponentem* radicis quæsitæ, ut si esset quantitas rationalis.

Exemplum

Sic radix cubica quantitatis radicalis $\sqrt{a}$ erit $\sqrt[6]{a}$. Quandoquidem diviso *exponente* $\frac{1}{2}$ quantitatis $\sqrt{a}$, sub formula imperfectæ potestatis consideratæ per *exponentem* 3 radicis cubicæ, *quotus* est $\frac{1}{6}$, ut proinde radix cubica quantitatis $a^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{a}$ sit $a^{\frac{1}{6}}$, sive $\sqrt[6]{a}$.

Demonstratio.

Manifesta est ex ipsa natura analyseos.

COROLLARIUM.

227 Itaque obtinebitur radix proposita datæ radicalis, si *exponens* signi, sub quo quantitas ipsa jacet, per *exponentem* quæ-

quæsitæ radicis multiplicetur, & factum eidem signo, veluti illius *exponens*, appingatur. Constat enim, radicalem $\sqrt[6]{a}$ esse radicem cubicam radicalis $\sqrt[2]{a}$, atque *exponentem* 6 radicalis $\sqrt[6]{a}$ oriri ex ductu *exponentis* 2 datæ radicalis $\sqrt[2]{a}$ in *exponentem* 3 radicis cubicæ quæsitæ.

HYPOTHESIS II.

228 Radix radicis interdum indicari solet præfigendo signum radicale cum suo *exponente* priori signo radicali, quo nimirum radix prima affecta est. Sic ad exprimendam radicem quadratam radicalis $\sqrt[2]{a}$, scribitur $\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$; ad indicandam radicem cubicam ejusdem $\sqrt[2]{a}$, scribitur $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$, atque ita de ceteris.

PROBLEMA IX.

Radicem radicis ad radicem primam revocare.

Resolutio.

229 *Exponens* radicis radicis multiplicetur per *exponentem* radicis primæ. Factum erit *exponens* radicis, ad quam radix ipsa radicis revocanda erat.

Exemplum.

Ut si ad radicem primam revocare operteat radicem $\sqrt[3]{}$ radicis $\sqrt[2]{a}$, hæc erit $\sqrt[6]{a}$.

De-

Demonstratio.

Est enim $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$ (a).

S C H O L I O N.

230 Reductis radicibus radicum ad radices primas, eodem modo, quo radicalium primarum, illarum additio, subtractio, multiplicatio, & divisio perficitur.

Calculus radicalium complexarum.

DEFINITIO VI.

231 *Quantitates radicales complexæ vocantur illæ, quæ pluribus terminis radicalibus constant, interjecto signo* $+$, *vel* $-$ *simul unitis*. Hujusmodi est quantitas $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, quæ radicalis *binomia*, $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, quæ radicalis *trinomia* nuncupatur, & sic deinceps.

P R O B L E M A X.

Quantitates irrationales complexas simul addere.

Resolutio.

232 Facta earum reductione ad simpliciorem expressionem, colligantur simul ope signi $+$, perinde ac si essent rationales complexæ.

Exemplum.

Ut, si quantitati $\sqrt{aab}+\sqrt{bx}$ adiicienda sit quantitas $\sqrt{md}-\sqrt{dde}$, summa erit $a\sqrt{b}+\sqrt{bx}+\sqrt{md}-d\sqrt{e}$.

(a) §. 227.

Demonstratio.

Patet ex ipsa natura signi $+$, quo quantitates ipsæ simul copulantur.

ANIMADVERSIO I.

233 Si occurrant quantitates similes sub signo radicali positæ, eademq; nota $+$, vel $-$ affectæ, facta *coefficientium* summa, hæc uni illarum præfigatur, ceteris in ipsa summa deletis. Si autem quantitates sub signo positæ, fuerint quidem similes inter se, sed notis contrariis affectæ, *coefficiens* radicalis subtrahendæ subducatur *coefficienti* illius, cui fieri debet subductio, & residuum quantitati sub signo existenti, veluti illius *coefficiens*, præfigatur. Ut si habeatur summa $a\sqrt{x}+\sqrt{d}+m\sqrt{x}-\sqrt{e}$ ex quantitate $\sqrt{mmx}-\sqrt{e}$ adjecta quantitati $\sqrt{aax}+\sqrt{d}$, cum termini $a\sqrt{x}$, $m\sqrt{x}$ eandem quantitatem x sub signo habeant, eademque nota $+$ sint affecti, collectis in unum *coefficientibus* a, m, summa erit $\overline{a+m}\sqrt{x}+\sqrt{d}-\sqrt{e}$. Est enim $\overline{a+m}\sqrt{x}=a\sqrt{x}+m\sqrt{x}$ (a). Similiter cum termini $a\sqrt{x}$, $d\sqrt{x}$ summæ $a\sqrt{x}+\sqrt{m}+\sqrt{dp}-d\sqrt{x}$ eandem quantitatem x sub signo habentes, contrariis notis affecti sint, facta subductione *coefficientis* d a *coefficiente* a, & residuo $\overline{a-d}$ eidem termino radicali $\sqrt{x}$ præposito, summa erit $\overline{a-d}\sqrt{x}+\sqrt{m}+\sqrt{dp}$. Manifestum namque est, esse $\overline{a-d}\sqrt{x}=a\sqrt{x}-d\sqrt{x}$ (b).

ANIMADVERSIO II.

234 Si radicalibus magnitudinibus, quarum summa quæritur, quantitates rationales permixtæ habeantur, ipsæ quoque simul colligendæ sunt, & ad simpliciorem expressionem re-

(a) §. 213. (b) §. 214.

reducendæ. Sic ſumma ex quantitate radicali $3a+\sqrt{m}$ adjecta radicali $4a-2b+\sqrt{d}$ erit $4a-2b+\sqrt{d}+3a+\sqrt{m}$, ſive reductis terminis ſimilibus, $7a-2b+\sqrt{d}+\sqrt{m}$.

PROBLEMA XI.

Quantitates irrationales complexas ſubtrahere.

Reſolutio.

235 Reductis terminis ad ſimpliciorem expreſſionem, quantitas ſubtrahenda ope ſigni — illi adiiciatur, cui fieri debet ſubtractio, ejuſque ſigna mutentur, ut de rationalibus complexis diximus.

Exemplum.

Ut ſi quantitati $\sqrt{aab}+\sqrt{d}$ ſubtrahenda ſit quantitas $\sqrt{eef}-\sqrt{m}$, ſcribendum eſt pro reſiduo $a\sqrt{b}+\sqrt{d}-e\sqrt{f}+\sqrt{m}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex legibus ſubtractionis magnitudinum complexarum rationalium.

ANIMADVERSIO I.

236 Si in reſiduo occurrant termini, qui eandem ſub ſigno radicali quantitatem habeant, colligantur ſimul eorum *coefficientes*, ſi eodem ſigno termini ipſi affecti ſint; unus vero alteri ſubducatur, ſi eorum ſigna ſint contraria, & ſumma in primo, reſiduum vero in ſecundo caſu quantitati ſub ſigno poſitæ præfigatur, ut diximus, loquendo de additione, quæ non ſunt repetenda.

ANIMADVERSIO II.

237 Si quæ sint quantitates rationales radicalibus permixtæ, considerentur in subtractione perinde ac si essent solæ; eaque proinde in illarum subductione executioni mandentur, quæ de subtractione rationalium magnitudinum superiori jam loco, nimirum §. 27. & *sequentibus* tradidimus. Sic residuum ex magnitudine $2a+\sqrt{b}$ subducta magnitudini $6a+\sqrt{d}$ erit $4a+\sqrt{d}-\sqrt{b}$. Est enim $6a-2a=4a$.

PROBLEMA XII.

Quantitates rationales complexas multiplicare.

Resolutio.

238 Si termini diversi nominis fuerint, ad eandem denominationem revocentur (a); tum singuli termini unius ducantur in singulos terminos alterius, & producta partialia ope signorum, quæ juxta leges multiplicationis alibi traditas (b), singulis conveniunt, simul copulentur, signo radicali singulis præfixo.

Exemplum.

Ut si multiplicanda sit radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per radicalem $\sqrt{d}-\sqrt{e}$, multiplicari debet uterque terminus radicalis $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ primo per $\sqrt{d}$, deinde per $-\sqrt{e}$; cumque sit $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\sqrt{d}=\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$ (c), & $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times-\sqrt{e}=-\sqrt{ae}-\sqrt{be}$ (d), productum totale ex hac multiplicatione consurgens erit $\sqrt{ad}+\sqrt{bd}-\sqrt{ae}-\sqrt{be}$,

De-

(a) §. 210.
(b) § 55. & seq.
(c) §. 53.
(d) §. 54.

Demonstratio.

Patet ex multiplicatione incomplexarum radicalium, & ex multiplicatione rationalium complexarum.

Animadversio I.

239 Si termini radicales multiplicandi *coefficientibus* sint affecti, facta multiplicatione quantitatum sub signo positarum, ipsorum *coefficientes* in se invicem ducantur, & factum ante signum, veluti *coefficiens* quantitatis sub signo positæ, statuatur, ut diximus supra loquendo de multiplicatione radicalium incomplexarum §. 217. Sic productum ex radicali $\overline{a\sqrt{b}+3\sqrt{d}}$ ducta in radicalem $\overline{m\sqrt{e}+2\sqrt{x}}$ erit $am\sqrt{be}+3m\sqrt{de}+2a\sqrt{bx}+6\sqrt{dx}$.

Animadversio II.

240 Si quantitatibus radicalibus, quarum una in aliam ducenda est, rationales permixtæ fuerint, eodem modo institui debet multiplicatio, quo ipsa fit cum rationalis per rationalem, vel radicalis per rationalem, juxta superius dicta, peragitur. Ut si multiplicare oporteat $\overline{4ab+\sqrt{d}}$ per $\overline{3ab+\sqrt{x}}$, productum erit $12abab+3ab\sqrt{d}+4ab\sqrt{x}+\sqrt{dx}$. Est enim $4ab\times 3ab=12abab$ (a), $\sqrt{d}\times ab=3ab\sqrt{d}$ (b), $4ab\times\sqrt{x}=4ab\sqrt{x}$ (c), $\sqrt{d}\times\sqrt{x}=\sqrt{dx}$ (d).

Scholion.

241 Nihil hic addimus de multiplicatione radicalis complexæ per quantitatem incomplexam tam rationalem, quam ra-

(a) §. 44.
(b) §. 218.
(c) §. 218.
(d) §. 215.

radicalem, cum id ex hactenus traditis satis aperte cuique constet.

PROBLEMA XIII.

Magnitudines irrationales complexas dividere.

Resolutio.

242 Reducantur ad eandem denominationem, si diversi nominis fuerint; tum dividantur, ut rationales complexæ, & singulis *quotis* radicale signum præfigatur.

Laterculum.

Esto radicalis $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$ per radicalem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ dividenda. Primo itaque divido terminum $\sqrt{de}$ per terminum $\sqrt{e}$ divisoris, qui in ipso $\sqrt{de}$ reperitur; cumque hujusce divisionis *quotus* sit $\sqrt{d}$ (a), multiplico integrum divisorem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ per *quotum* $+\sqrt{d}$, & factum $\sqrt{de}-\sqrt{dm}$ subtraho magnitudini dividendæ $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$. Residui $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$ terminum $-\sqrt{ae}$, cui divisor $\sqrt{e}$ itidem includitur, divido per eundem $+\sqrt{e}$, & *quotum* $\sqrt{a}$ ope signi $-$, quod illi debetur (b), adjungo priori *quoto* $\sqrt{d}$, ita ut fiat $\sqrt{d}-\sqrt{a}$. *Quotum* $-\sqrt{a}$ modo inventum multiplico per integrum divisorem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$, quodque hinc efficitur $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$, aufero ex toto residuo $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$. Quoniam igitur ex hac subductione nihil, ut patet, relinquitur, ductoque divisore $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ in *quotum* $\sqrt{d}-\sqrt{a}$, emergit quantitas ipsa $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$, *quotus* datæ radicalis per radicalem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ divisæ erit $\sqrt{d}-\sqrt{a}$.

Demonstratio.

Patet ex dictis de divisione tum radicalium simplicium, tum rationalium.

ANI-

(a) §. 21. (b) §. 23.

ANIMADVERSIO I.

243 Si termini radicales *coefficientibus* sint affecti, ipsi quoque dividendi sunt, ut diximus in divisione radicalium simplicium §. 223. Si autem quantitates rationales radicalibus sint permixtæ, memoria repetantur, quæ dicta sunt §. 224. de divisione rationalis per radicalem, vel radicalis per rationalem.

ANIMADVERSIO II.

244 Si quantitates radicales, quarum una per aliam dividenda est, omnino dissimiles inter se fuerint, divisor, ducta lineola, quantitati dividendæ subscribatur. Hæc enim fractio erit *quotus* divisionis quæsitus. *Quotus* nempe radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ divisæ per radicalem $\sqrt{d}-\sqrt{x}$ erit fractio $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{d}-\sqrt{x}}$.

SCHOLION I.

245 Nihil de divisione radicalis complexæ per quantitatem radicalem, vel rationalem incomplexam adiiciendum censui, quod hujusmodi calculus ex hactenus traditis satis pateat.

SCHOLION II.

246 Eodem modo fit additio, subtractio, multiplicatio, & divisio radicalium, quæ *imaginariæ* dicuntur, hoc uno dumtaxat notato, ut non mutentur signa, quibus affectæ sunt quantitates sub signo positæ. Nimirum pro facto radicalis $\sqrt{-a}$ multiplicatæ per radicalem $\sqrt{-b}$ scribendum non est $\sqrt{+ab}$, sed $\sqrt{-ab}$. Repugnat enim, quemadmodum superiori etiam loco innuimus (a), ut ex ductu quantitatis imaginariæ in aliam imaginariam realis quantitas producatur.

PRO-

(a) §. 201.

PROBLEMA XIV.

Quantitatem irrationalem complexam ad determinatam poteſtatem evehere.

Reſolutio.

247 Data quantitas ſpectetur ſub formula poteſtatis imperfectæ; tum ea executioni mandentur, quibus perficitur formatio poteſtatum quantitatis rationalis complexæ.

Exemplum I.

Ut ſi ad ſecundam poteſtatem evehenda ſit radicalis $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ſumta ipſa quantitate ſub formula $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, illius quadratum erit $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b$, ſive $a + 2\sqrt{ab} + b$, nempe factum ex quadrato a partis prioris $\sqrt{a}$, ex $2\sqrt{ab}$ duplo ejus, quod ſit multiplicando partem priorem $\sqrt{a}$ per poſteriorem $\sqrt{b}$, & ex quadrato b partis poſterioris $\sqrt{b}$.

Exemplum II.

Similiter cubus ejuſdem quantitatis $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ſpectatæ ſub eadem formula $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ erit $a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3ba^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$, ſeu $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$, videlicet factum ex cubo $\sqrt{a^3}$ partis prioris $\sqrt{a}$, ex $3a\sqrt{b}$ triplo ejus, quod ſit multiplicando quadratum a ejuſdem partis primæ $\sqrt{a}$ per ſecundam $\sqrt{b}$, ex $3b\sqrt{a}$ triplo producti ex ductu quadrati b partis poſterioris $\sqrt{b}$ in priorem $\sqrt{a}$, & ex $\sqrt{a^3}$ cubo ejuſdem partis poſterioris $\sqrt{b}$. Eodem modo ratiocinare de aliis.

De-

Demonstratio.

Coincidit cum ea, qua ostenditur formatio potestatum quantitatis rationalis complexæ.

PROBLEMA XV.

Radicem ex quantitate irrationali complexa elicere.

Resolutio.

248 Sumta ipsa quantitate sub formula potestatis imperfectæ, eodem artificio radix cujusvis gradus ex illa extrahatur, quo ipsa eadem radix elicitur ex quantitate rationali complexa.

Exemplum I.

Extrahere oporteat radicem quadratam ex quantitate $a + 2\sqrt{ab} + b$. Spectata igitur ipsa quantitate sub formula $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b$ potestatis imperfectæ, sumatur radix quadrata $a^{\frac{1}{2}}$ ex primo elemento a, tum per illius duplum $2a^{\frac{1}{2}}$ dividatur elementum $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, cui illa includitur, & quotus $b^{\frac{1}{2}}$ radici $a^{\frac{1}{2}}$ adiiciatur ope signi $+$, quod illi convenit. Nullum autem aliud elementum est in data quantitate, cui radix $a^{\frac{1}{2}}$ inexistat; factaque elevatione quantitatis $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ad quadratum, emergit quantitas data, ut patet. Ergo $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, sive $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ erit radix quæsita.

Exemplum II.

Extrahenda sit radix cubica ex quantitate $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$. Itaque spectata ipsa quantitate sub formula $a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + ba^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$, sumatur radix cubica $a^{\frac{1}{2}}$ ex primo elemento $a^{\frac{3}{2}}$; tum ipsa radice ad quadratum a evecta, per ipsius triplum $3a$ dividatur elementum $3ab^{\frac{1}{2}}$, cui includitur, & quotus $b^{\frac{1}{2}}$ ipsi radici ope convenientis signi $+$ adiiciatur. Nullum autem aliud elementum in ipsa quantitate occurrit, cui quadratum a inexistat, & si quantitas $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ad cubum elevetur, fit ipsa quantitas data, ut est manifestum. Igitur radix cubica datæ quantitatis erit $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, sive $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Idipsum de aliis dicito.

Demonstratio.

Eadem est cum illa, qua ostenditur extractio radicis ex quantitate rationali complexa.

S C H O L I O N.

249 Si data quantitas irrationalis hujusmodi non fuerit, ut quæsita radix ex ipsa elici queat, quantitas incomplexa illi substituatur, eique signum radicale $\sqrt{}$ suo *exponente* affectum præfigatur; tum hæc ipsa quantitas radicali signo affecta, spectetur in calculo veluti radix quęsita. Ut si computanda sit in calculo radix cubica quantitatis $\sqrt{ab} + \sqrt{d} \sqrt{-x}$, cum hæc ex ipsa quantitate elici nequeat, facta hypothesi, ut sit $\sqrt{ab} + \sqrt{d} - \sqrt{x} = p$, radix cubica datæ ipsius quantitatis in calculo deinceps consideranda, erit $\sqrt[3]{p}$.

SE-

SECTIO IX.

Axiomata generalia Matheseos.

DEFINITIO I.

250 *Totum dicitur illa magnitudo, quæ ex pluribus aliis simul unitis consurgit. Magnitudines vero illæ, ex quarum unione fit totum, partes vocantur.* Ut si ex magnitudinibus *a*, *b*, *c* simul unitis fiat magnitudo *d*, hæc erit *totum*, illæ vero ipsius *partes*. Dividitur autem *pars* in *aliquotam*, & *aliquantam*.

DEFINITIO II.

251 *Pars aliquota est illa, quæ aliquoties sumta suum totum adæquat.* Contra vero *aliquanta, quæ, si aliquoties sumatur, suum totum vel non explet, vel superat.* Sic numerus 2 est pars *aliquota* numeri 6, & numerus 3 est pars *aliquanta* numeri 10. Etenim numerus 2 *ter* sumtus efficit numerum 6. At vero si numerus 3 *ter* sumatur, numerum *denario* minorem; *quater* vero sumtus numerum *denario* majorem constituit.

DEFINITIO III.

252 *Magnitudines illæ dicuntur æquales, quarum valor est idem. Inæquales vero, quarum valor est diversus.* Ut si ponatur $a=3$, $b=3$, $d=4$, duæ *a*, *b æquales* erunt inter se, duæ autem *a*, *d*, sicuti etiam duæ *b*, *d inæquales*.

COROLLARIUM.

253 *Una duarum magnitudinum æqualium potest, salva quantitate, alteri substitui. Una vero duarum inæqualium alteri substitui nequit, quin valor fiat diversus.* Hinc Cl. Volfius vocat *æqualia, quorum unum alteri, salva quantitate, substitui potest,* *inæ-*

inæqualia autem, si pars unius possit alteri toti substitui (a).

DEFINITIO IV.

254 *Magnitudo major vocatur illa, cujus una tantum pars, est alteri, cui comparatur, æqualis. Illa vero minor dicitur, quæ unam dumtaxat alterius partem adæquat.* Sic magnitudo $a+b$ erit major, & magnitudo d erit minor, si fuerit $a=d$.

COROLLARIUM.

255 *Duarum inæqualium magnitudinum altera major, altera minor necessario est.* Unius enim pars est alteri toti magnitudini æqualis.

Axioma I.

Omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis, & omnes partes cujusvis totius simul sumtæ sunt ipsi toto æquales.

256 Ut si omnes partes magnitudinis m fuerint a, b, c, erit $m=a+b+c$, & $a+b+c=m$.

Axioma II.

Omne totum est majus qualibet sui parte seorsim ab aliis sumta; & vicissim qualibet pars est minor suo toto.

257 Videlicet si magnitudines a, b, c fuerint partes totius m, erit $m>a$, $m>b$, $m>c$.

Axio-

(a) Elem. Arith. §. 15, & 20.

Axioma III.

Omnis magnitudo est sibimetipsi æqualis.

258 Usus hujus principii amplissimus est, ut notat Cl. Volfius (a). Plerumque enim accidit, ut eadem magnitudo ad seipsam referri debeat.

Axioma IV.

Magnitudines, quæ eidem, vel æqualibus magnitudinibus sunt æquales, inter se quoque sunt æquales.

259 Ut si magnitudines a, b æquales fuerint eidem magnitudini c, vel æqualibus c, d, erunt quoque inter se æquales.

Axioma V.

Magnitudines inæqualibus æquales, sunt inter se inæquales.

260 Si nempe duæ magnitudines a, b æquales sint duabus c, d, altera alteri, duæ a, b inæquales erunt inter se, si duæ c, d fuerint inæquales. Videlicet erit $a > b$, si fuerit $c > d$; erit vero $a < b$, si itidem fuerit $c < d$.

Axioma VI.

Magnitudo, quæ uni æqualium æqualis est, alteri quoque earundem est æqualis.

261 Posita nimirum æqualitate duarum magnitudinum a, b,

(a) Elem. Arith. §. 82.

a, *b*, si magnitudo *d* æqualis fuerit magnitudini *a*, etiam magnitudini *b* æqualis erit.

Axioma VII.

Si una duarum magnitudinum æqualium fuerit uni magnitudini æqualis, ipsarum quoque altera eidem æqualis erit.

262 Videlicet posita æqualitate duarum magnitudinum *a*, *b*, si magnitudo *a* æqualis fuerit magnitudini *d*, etiam magnitudo *b* erit eidem *d* æqualis.

Axioma VIII.

Si una duarum magnitudinum æqualium æqualis fuerit uni duarum itidem æqualium, ipsarum quoque altera erit alteri earundem æqualis.

263 Ut si duæ magnitudines *a*, *b* æquales fuerint inter se, quemadmodum etiam duæ *c*, *d*; fuerit autem magnitudo *a* æqualis magnitudini *c*, etiam magnitudo *b* erit magnitudini *d* æqualis.

Axioma IX.

Si una duarum magnitudinum æqualium fuerit major, vel minor tertia, aut una duarum æqualium, etiam altera illarum erit eadem tertia, vel earundem altera major, vel minor.

264 Nimirum posita æqualitate duarum *a*, *b*, si fuerit $a > c$, erit etiam $b > c$, & si fuerit $a < c$, erit etiam $b < c$. Si-

Similiter si fuerit $a > c$, erit quoque $b > d$, & si $a < c$, erit itidem $b < d$, admissa nempe æqualitate etiam duarum c, d.

Axioma X.

Si æqualibus magnitudinibus æquales addantur, tota erunt æqualia.

265 Ut si æqualibus magnitudinibus a, b adiiciantur æquales magnitudines c, d, erit $a + c = b + d$.

Axioma XI.

Si æqualibus magnitudinibus æquales partes subducantur, residua erunt æqualia.

266 Ut si æqualibus magnitudinibus a, b subducantur æquales partes c, d, erit $a - c = b - d$.

Axioma XII.

Magnitudo, quæ altera magnitudine, cui comparatur, neque major est, neque minor, est illi æqualis.

267 Ut si magnitudo a neque major, neque minor sit magnitudine b, erit ipsi b æqualis, dummodo tamen magnitudo a sit hujusmodi, ut aliquoties sumta magnitudinem b, cui comparatur, excedat.

Axio-

Axioma XIII.

Si magnitudinibus inæqualibus æquales magnitudines addantur, tota erunt inæqualia.

268 Videlicet si fuerit $a > b$, & $c = d$, erit $a + c > b + d$.

Axioma XIV.

Si magnitudinibus inæqualibus æquales partes subducantur, residua erunt inæqualia.

269 Ut si fuerit $a > b$, & $c = d$, erit $a - c > a - d$.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER I.

De proportione, & proportionalitate Geometrica magnitudinum in genere.

PRoportionum theoriam primo loco tradendam censui, quod ab ea non tantum Mathesis tota dependeat, verum etiam mentis lumen mirum in modum excitetur, atque ad ea, quæ implexa sunt maximeque abstrusa, penetranda sensim mens ipsa deducatur.

DEFINITIO I.

1 *MAgnitudines homogeneæ sunt illæ, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest. Heterogeneæ vero, quarum una, si aliquoties sumatur, alteram excedere nequit.* Magnitudines *homogeneæ* sunt duæ *lineæ*, duæ *superficies*, duæ *vires motivæ* &c. Una siquidem *linea* potest adeo augeri, ut alteram superet, sicuti etiam una *vis motiva* adeo potest intendi, ut aliam, ad quam refertur, excedat. At vero *linea*, & *superficies* sunt quantitates *heterogeneæ*; quia *linea* non est hujusmodi, ut aliquoties sumta *superficiem* superare possit.

DEFINITIO II.

2 *Proportio, quæ ratio etiam dicitur, est modus, quo una duarum magnitudinum alteram continet, vel in illa continetur.* Sic numerus 4 dicitur *proportionem* habere ad numerum 2, quatenus numerus 4 bis numerum 2 comprehendit; & vicissim *ratio* numeri 2 ad numerum 4 in eo tota consistit, ut numerus 2 in numero 4 bis reperiatur. Quoniam vero ex hac mu-

tua duarum quantitatum comparatione, unius valor, qui antea ignotus erat, palam efficitur, definiri potest *proportio* cum Viro Cl. *ea homogeneorum relatio, quæ unius quantitatem determinat ex quantitate alterius sine tertio homogeneo assumto*(a). Profecto si ex comparatione magnitudinis *a* cum magnitudine *b* dignoscatur, magnitudo *a* ter in *b* contineri, ex noto valore termini *a* valor quoque termini *b* nobis innotescit. Etenim si fuerit $a=3$, erit hoc ipso $b=9$.

COROLLARIUM I.

3 *Non datur proportio nisi inter magnitudines homogeneas*. Nisi enim magnitudines, quarum una alteri comparatur, homogeneæ fuerint, non poterit earum una alteram continere, sicuti una aliquoties sumta nequit aliam excedere. *Finiti* propterea *ad infinitum nulla est proportio*. Quippe tantum abest, ut finita magnitudo quantumlibet multiplicata infinitam superet, ut ne illam æquare unquam possit.

COROLLARIUM II.

4 *Proportio duarum magnitudinum divisionis ope palam efficitur*. Per divisionem enim dignoscitur modus, quo illarum una alteram continet, vel in altera continetur (b).

DEFINITIO III.

5 *Antecedens proportionis dicitur illa magnitudo, quæ ad aliam refertur. Illa vero proportionis consequens vocatur, ad quam alia refertur*. Ut si magnitudo *a* magnitudini *b* comparetur, magnitudo *a* erit *antecedens proportionis*, & magnitudo *b* ejusdem *consequens*.

HYPOTHESIS I.

6 Ratio duarum magnitudinum per fractionem exprimitur,

(a) Volfius Elem. Arith. §. 126. (b) Synop. Alg. §. 61.

tur, cujus numerator fit ipfius proportionis *antecedens terminus*, denominator vero illius *confequens*. Videlicet ratio magnitudinis a ad magnitudinem b defignatur per fractionem $\frac{a}{b}$. Cum enim fractio $\frac{a}{b}$ divifionem indicet magnitudinis a per magnitudinem b (a); divifio autem proportionem determinet termini a divifi ad diviforem b (b), ipfa quoque fractio $\frac{a}{b}$ proportionem determinabit numeratoris a ad denominatorem b.

DEFINITIO IV.

7 *Exponens rationis*, qui illius etiam *denominator* dici folet, *eft quantitas integra, vel fracta modum definiens, quo antecedens proportionis terminus confequentem continet, vel in illo continetur*. Sic numerus 3 dicitur *exponens* rationis, quam habet numerus 6 ad numerum 2. Determinat enim, numerum 6 ter numerum 2, ad quem refertur, comprehendere. Similiter fractio $\frac{1}{3}$ eft *exponens* rationis numeri 6 ad numerum 18. Quandoquidem fractio $\frac{1}{3}$ palam efficit, antecedentem 6 effe unam tertiam partem confequentis 18, five antecedentem illius proportionis terminum ter in fuo confequente comprehendi.

COROLLARIUM I.

8 *Exponens rationis non differt a quotiente antecedentis termini per confequentem divifi*. Ut fi *quotus* magnitudinis a divifæ per magnitudinem b fuerit m, quantitas m erit *exponens* ratio-

R 2 nis,

(a) Synopfis Algeb. §. 70.
(b) §. 4.

nis, quam habet magnitudo *a* ad magnitudinem *b*. Etenim *quotus m* unitati comparatus modum determinat, quo terminus *a* divisus continet divisorem *b*, vel in ipso *b* comprehenditur. (a)

COROLLARIUM II.

9 *Antecedens proportionis terminus se habet ad consequentem, ut exponens ipsius proportionis ad unitatem.* Divisa namque magnitudo toties continet divisorem, quoties quotus divisionis unitatem complectitur; vel quæ pars, vel partes unitatis est quotus, eadem pars, vel eædem partes divisoris est magnitudo ipsa divisa (b). *Exponens* autem rationis idem est cum *quoto* termini antecedentis per consequentem divisi (c). Ergo, ut *exponens* proportionis est ad unitatem, ita se habet antecedens ad consequentem.

COROLLARIUM III.

10 *Si consequens proportionis fuerit unitas, antecedens ejusdem terminus erit exponens rationis, quam habet antecedens ad consequentem.* Quantitas nempe *a* est *exponens* rationis ipsius *a* ad unitatem. Est enim $\frac{a}{1} = a$ (d).

COROLLARIUM IV.

11 *In omni proportione si consequens per exponentem multiplicetur, productum efficitur antecedenti termino æquale.* Ut si *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit *m*, erit $bm = a$. Etenim multiplicato divisore per *quotum*, fit ipsa magnitudo divisa (e).

DEFI-

(a) Synopsis Algeb. §. 64.
(b) Synopsis Algeb. ibidem.
(c) §. 8.
(d) Synopsis Algeb. §. 69.
(e) Ibidem §. 65.

DEFINITIO V.

12 Proportio vel *rationalis* eſt, vel *irrationalis*. *Proportionem rationalem magnitudines illæ inter ſe habere dicuntur, quibus datur communis menſura, ſeu quarum valor vulgaribus numeris exprimi poteſt. Irrationalem vero illæ, quæ ſunt hujuſmodi, ut nulla communis quantitas eas metiri queat*. Dari magnitudines *commenſurabiles*, neminem latet. Extare vero *incommenſurabiles*, ſuo loco demonſtrabitur. Dividitur porro *proportio rationalis* in proportionem *æqualitatis*, & *inæqualitatis*.

DEFINITIO VI.

13 *Proportio æqualitatis eſt habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram ſemel exacte continet*. Hujuſmodi eſt ratio magnitudinis *a* ad magnitudinem *b*, ſi ponatur magnitudo *a* ſemel exacte magnitudinem *b* comprehendere.

COROLLARIUM.

14 *Exponens proportionis æqualitatis eſt unitas*, & viciſſim *magnitudines illæ ſunt æquales, quarum ratio habet pro exponente unitatem*. Omnis enim magnitudo ſemel dumtaxat ſeipſam continet; & quæ tantum ſemel exacte alteram continet, eſt illi æqualis.

DEFINITIO VII.

15 *Proportio inæqualitatis eſt habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram ſuperat*. Hæc autem duplex eſt, *majoris* nempe, & *minoris inæqualitatis*.

DEFINITIO VIII.

16 *Proportio majoris inæqualitatis eſt habitudo majoris magnitudinis ad minorem, ſive totius ad partem*. Contra vero *proportio minoris inæqualitatis eſt habitudo minoris magnitudinis ad majo-*

majorem, *seu partis ad totum*. Ut si fuerit $a > b$, ratio $\frac{a}{b}$ erit *majoris*, & ratio $\frac{b}{a}$ erit *minoris inaequalitatis*.

COROLLARIUM I.

17 *Exponens rationis majoris inaequalitatis est numerus major unitate, & ideo exponentem rationis aequalitatis excedit. Exponens vero rationis minoris inaequalitatis est numerus minor unitate, atque adeo minor exponente rationis aequalitatis.* *Exponens* namque rationis cujuscumque se habet ad unitatem, ut antecedens ipsius proportionis ad consequentem (a); & *exponens* rationis æqualitatis ab unitate haudquaquam distinguitur. (b).

COROLLARIUM II.

18 *Omnis ratio, cujus exponens unitatem superat, est ratio majoris inaequalitatis. Illa vero, cujus exponens ab unitate deficit, est ratio minoris inaequalitatis.* Hæc enim ipso illius antecedens consequentem excedit; hujus vero antecedens a consequente superatur.

SCHOLION.

19 Proportionis *majoris inaequalitatis* quinque numerantur species, videlicet *multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplexsuperparticularis*, & *multiplexsuperpartiens*. Tot similiter recensentur species proportionis *minoris inaequalitatis*, iisdemque nominibus designantur, adiecta tamen illis particula *sub*. Sunt enim *submultiplex*, *subsuperparticularis*, *subsuperpartiens*, *submultiplexsuperparticularis*, *submultiplexsuperpartiens*.

DEFINITIO IX.

20 *Proportio multiplex est, cum antecedens aliquoties adaequate*

(a) §. 9. (b) §. 14.

quate consequentem continet. Submultiplex vero, cum antecedens aliquoties adaquate in consequente comprehenditur. *Multiplex* est proportio, quam habet 6 ad 1, *submultiplex* ea, quam habet 1 ad 6. Etenim unitas *sexties* in numero 6 continentur. Dividitur itaque proportio *multiplex* in *duplam*, *triplam*, *quadruplam*, atque ita deinceps in infinitum. *Submultiplex* vero in *subduplam*, *subtriplam*, *subquadruplam* &c. Proportio *dupla* est, cum antecedens *bis* consequentem comprehendit, ut ratio 2 ad 1, & sic deinceps. Vicissim ratio *subdupla* est, cum antecedens *bis* in suo consequente continetur, qualis est proportio 1 ad 2; *subtripla*, cum antecedens *ter* in suo consequente comprehenditur, ut ratio 1 ad 3, atque ita de ceteris.

COROLLARIUM.

21 *Exponens rationis multiplicis est numerus vulgaris integer. Exponens rationis submultiplicis est fractio, cujus numerator est unitas, denominator vero numerus ab unitate diversus.* Sic exponens rationis *dupla* est 2, rationis *tripla* est 3, rationis *quadrupla* est 4. &c. *Exponens* vero rationis *subdupla* est $\frac{1}{2}$, *subtripla* $\frac{1}{3}$ &c.

DEFINITIO X.

22 *Proportio superparticularis est, cum antecedens semel consequentem continet, & unam insuper illius partem aliquotam. Vicissim proportio subsuperparticularis est, cum antecedens semel cum una sui parte aliquota in consequente continetur.* Hujusmodi est ratio, quam habet 3 ad 2, & vicissim 2 ad 3. Etenim 3 semel continet 2, & insuper unam illius partem dimidiam. Pro diversa idcirco habitudine hujusce partis aliquotæ excessus majoris termini supra minorem in plures species hoc proportionis genus distinguitur. Etenim si pars illa *bis* in minori contineatur, proportio majoris ad minorem dicitur *sesquialtera*, ut ratio 3 ad 2, ratio vero minoris ad majorem, ut 2 ad 3, vocatur *subsesquialtera*. Si pars illa sit una tertia minoris

noris termini, proportio dicitur *ſeſquitertia*, ſi major ad minorem, ut 4 ad 3, vel *ſubſeſquitertia*, ſi minor ad majorem, ut 3 ad 4 referatur, & ſic deinceps.

COROLLARIUM.

23 *Exponens rationis ſuperparticularis eſt unitas cum fractione, cujus numerator ſemper eſt unitas. Exponens vero rationis ſubſuperparticularis eſt fractio, cujus numerator una tantum unitate ſuo denominatore minor eſt.* Sic *exponens* rationis *ſeſquialteræ* eſt $1\frac{1}{2}$, rationis *ſeſquitertiæ* eſt $1\frac{1}{3}$, rationis *ſeſquiquartæ* eſt $1\frac{1}{4}$, &c. *Exponens* vero rationis *ſubſeſquialteræ* eſt $\frac{2}{3}$, *ſubſeſquitertiæ* eſt $\frac{3}{4}$ &c.

DEFINITIO XI.

24 *Proportio ſuperpartiens eſt, cum antecedens ſemel conſequentem continet cum aliquot illius partibus aliquotis, quæ tamen ſimul ſumtæ unam ejuſdem aliquotam partem non conſtituunt. Proportio vero ſubſuperpartiens eſt, cum antecedens ſemel cum aliquot partibus ſuis aliquotis in conſequente continetur.* Talis eſt proportio, quam habet 5 ad 3, & 3 ad 5. Etenim 5 ſemel complectitur 3 cum *duobus* ejuſdem *trientibus*, qui unam aliquotam ejuſdem partem conſtituere nequeunt. In diviſione propterea proportionis *ſuperpartientis* ratio habenda eſt tum numeri partium aliquotarum exceſſus majoris termini ſupra minorem, tum illarum partium indolis. Itaque ſi antecedens ſemel cum *duobus trientibus* conſequentem contineat, quemadmodum numerus 5 continet 3, proportio dicitur *ſuperbipartiens tertias*. Si ſemel cum *duabus quintis*, dicitur *ſuperbipartiens quintas*, qualis eſt ratio numeri 7 ad numerum 5. Si ſemel cum *tribus ſeptimis*, vocatur *ſupertripartiens ſeptimas*, cujuſmodi eſt habitudo numeri 10 ad numerum 7, & ſic deinceps. Viciſſim vero ratio numeri 3 ad 5 dicitur *ſub-*

ſuper-

superbipartiens tertias; ratio numeri 5 ad 7 *subsuperbipartiens quintas*; ratio numeri 7 ad 10 *subsupertripartiens septimas* &c.

COROLLARIUM.

25 *Exponens rationis superpartientis est unitas cum fractione, cujus numerator numerum partium aliquotarum excessus majoris termini supra minorem indicat, denominator vero illarum qualitatem designat. Exponens autem rationis subsuperpartientis est fractio, cujus numerator tot unitatibus a denominatore deficit, quot partibus aliquotis minoris termini major ipsum superat.* Nimirum *exponens* rationis *superbipartientis tertias* est $1\frac{2}{3}$, rationis *superbipartientis quintas* est $1\frac{2}{5}$, rationis *supertripartientis septimas* est $1\frac{3}{7}$. *Exponens* vero rationis *subsuperbipartientis tertias* est $\frac{3}{5}$, rationis *subsuperbipartientis quintas* est $\frac{5}{7}$, rationis *subsupertripartientis septimas* est $\frac{7}{10}$ &c.

DEFINITIO XII.

26 *Proportio multiplex superparticularis est, cum antecedens aliquoties consequentem cum una sui parte aliquota comprehendit. Proportio vero submultiplex superparticularis est, cum antecedens aliquoties cum una sui parte aliquota in consequente continetur.* Talis est proportio, quam inter se habent numeri 7, 3 *multiplex superparticularis* nimirum est ratio numeri 7 ad numerum 3, *submultiplex superparticularis* autem ratio numeri 3 ad numerum 7 Quandoquidem 7 bis continet 3. cum una tertia ipsius parte. In hoc idcirco genere proportionis consideranda est tum multiplex continentia minoris termini in majori; tum habitudo partis aliquotæ excessus ad terminum minorem. Si ergo major terminus bis minorem contineat & unam illius partem dimidiam, quemadmodum numerus 5 continet

2, proportio majoris ad minorem dicitur *duplasesquialtera*; ratio vero minoris ad majorem *subduplasesquialtera*. Si major ter complectatur minorem cum uno illius quadrante, ratio majoris ad minorem vocatur *triplasesquiquarta*, qualis est ratio numeri 13 ad numerum 4, ratio vero minoris ad majorem, ut numeri 4 ad numerum 13, *subtriplasesquiquarta* nuncupatur. Eodem modo ratiocinare de aliis.

COROLLARIUM.

27 *Exponens rationis multiplicis superparticularis est numerus integer cum fractione, cujus numerator semper est unitas. Exponens vero rationis submultiplicis superparticularis est fractio, cujus denominator exhibet partes aliquotas majoris termini, numerator autem, quot ex his in minori termino contineantur, designat.* Sic *exponens* rationis *duplæ sesquialteræ* est $2\frac{1}{2}$, *triplæ sesquiquartæ* est $3\frac{1}{4}$; rationis vero *subduplæ sesquialteræ* est $\frac{2}{5}$, *subtriplæ sesquiquartæ* est $\frac{4}{13}$.

DEFINITIO XIII.

28 *Proportio multiplex superpartiens est, cum antecedens aliquoties consequentem continet cum aliquot ipsius partibus aliquotis, quæ tamen simul sumtæ unam aliquotam illius partem minime constituunt. Proportio vero submultiplex superpartiens est, cum antecedens aliquoties cum aliquot suis partibus aliquotis, unam aliquotam ejusdem partem haudquaquam coæquantibus, in consequente comprehenditur.* Sic *multiplex superpartiens* est ratio numeri 11 ad numerum 3, *submultiplex superpartiens* ratio numeri 3 ad numerum 11. Quandoquidem numerus 11 ter cum *duobus trientibus* numerum 3 comprehendit. In discernendis idcirco speciebus hujus generis proportionis habenda est ratio primo multiplicis continentiæ minoris termini in majori. Secundo numeri partium aliquotarum excessus majoris termini supra minorem aliquoties contentum. Tertio harum partium in-

dolis.

dolis. Hinc proportio numeri 11 ad numerum 3 vocatur *tripla superbipartiens tertias*. Dicitur enim *tripla*, quia numerus 11 ter continet numerum 3. Dicitur *superbipartiens tertias*; quia excessus majoris numeri supra minorem est 2, qui continet duas tertias partes minoris numeri 3. Vicissim vero eandem ob causam ratio numeri 3 ad numerum 11 ratio *subtriplasuperbipartiens tertias* nuncupatur. Hac eadem methodo ceteræ species hujus proportionis determinari facile poterunt.

COROLLARIUM.

29 *Exponens rationis multiplicis superpartientis est numerus integer cum fractione, cujus numerator exhibet numerum partium aliquotarum excessus antecedentis supra consequentem, denominator vero illarum partium indolem designat. Exponens vero rationis submultiplicis superpartientis est fractio, cujus denominator continet omnes partes aliquotas consequentis; numerator vero eas numerat, quæ in antecedente continentur.* Sic *exponens* rationis *triplæ superbipartientis tertias* est $3 \frac{2}{3}$; rationis vero *subtriplæ superbipartientis tertias* est $\frac{3}{11}$

SCHOLION.

30 Si *exponentes* rationum, quas hactenus explicavimus, attento animo expendantur, perspicuum fiet, proportionem tam *majoris*, quam *minoris inæqualitatis* nonnisi in quinque species modo traditas dividi posse.

DEFINITIO XIV.

31 *Duæ rationes dicuntur æquales, seu similes, cum antecedentes earum termini eodem modo suos consequentes continent, vel in illis continentur.* Sic ratio numeri 24 ad numerum 9 æqualis est rationi, quam habet numerum 8 ad numerus 3. Ut enim antecedens 24 *bis* cum *duobus trientibus* continet consequentem 9, ita antecedens 8 *bis* cum *duobus trientibus* suum

consequentem 3 comprehendit. Similiter ratio numeri 2 ad numerum 6 adæquat rationem numeri 4 ad numerum 12, Quandoquidem antecedentes termini 2, 4, *ter* in suis consequentibus 6, 12, continentur.

COROLLARIUM I.

32 *Ratio fractionis cujuscunque ad unitatem eadem est cum ea, quam ipsius fractionis numerator ad ejusdem denominatorem habet.* Nimirum fractio $\frac{a}{b}$ se habet ad unitatem, ut numerator a ad denominatorem b. Eodem namque modo fractio $\frac{a}{b}$ continet unitatem, vel in unitate continetur, quo numerator a complectitur denominatorem b, vel in illo comprehenditur. (a)

COROLLARIUM II.

33 *In omni multiplicatione ratio producti ad terminum multiplicatum diversa ab ea non est, quam habet terminus multiplicans ad unitatem.* Similiter *in omni divisione ratio quotientis ad unitatem similis est rationi termini divisi ad divisorem.* Patet quoad utramque partem ex ipsa natura multiplicationis, & divisionis; nec non ex notione identitatis rationum modo exposita. Cumque *exponens* rationis cujusque non differat a quoto antecedentis termini per consequentem divisi (b), *ratio exponentis ad unitatem diversa ab ea non erit, quam habet antecedens ad consequentem*, prout superiori etiam loco notavimus (c).

COROLLARIUM III.

34 *Rationes æquales eundem, sive æquales exponentes habent.* Et vicissim *rationes, quæ eundem, seu æquales exponentes habent, sunt æquales.* Ut si ratio $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit rationi $\frac{c}{d}$ *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ æqualis erit *exponenti* rationis $\frac{c}{d}$ Et si *exponens*

(a) Synopsis Algeb. §. 99. (b) §. 2. (c) §. 9.

ponens rationis $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit *exponenti* rationis $\frac{c}{d}$, ratio quoque $\frac{a}{b}$ rationi $\frac{c}{d}$ æqualis erit. Si namque rationes sunt æquales, antecedentes earum termini eodem modo suos consequentes continent, aut in illis continentur (a). *Exponens* autem rationis est quantitas modum definiens, quo antecedens continet suum consequentem, vel in illo continetur (b). Ergo si rationes sunt æquales, earum quoque *exponentes* erunt æquales; & vicissim, si *exponentes* rationum sunt æquales, ipsæ itidem rationes sibi mutuo æquales erunt.

S C H O L I O N.

35 Cavendum quammaxime est, ne rationum æqualitas, cum ratione æqualitatis confundatur. Quandoquidem ratio æqualitatis exigit, ut termini sint æquales (c); at vero æqualitas rationum in eo tantum posita est, ut termini antecedentes eodem modo suos consequentes respiciant: quod quidem habetur, quamvis termini, qui inter se mutuo comparantur, sint inæquales.

HYPOTHESIS II.

36 Equalitas rationum signo æqualitatis $=$ designatur, videlicet sicuti $a = b$ significat, magnitudinem a æqualem esse magnitudini b, ita $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vel $a.\, b = c.\, d$ indicat, rationem magnitudinis a ad magnitudinem b æqualem esse rationi magnitudinis c ad magnitudinem d. Nonnulli ad rationum ęqualitatem indicandam utuntur signo ::, ita nimirum ut $a.\, b :: c.\, d$ exprimat æqualitatem rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Verum, ut advertit Cl. Volfius (d), signum scientificum $=$ signo non scientifico :: præferri debet.

DEFI-

(a) §. 31.
(b) §. 7.
(c) §. 13
(d) Elem. Arith. §. 153.

DEFINITIO XV.

37 *Partes tam aliquotæ, quam aliquantæ dicuntur similes, quæ eandem ad suum totum rationem habent*. Ut si ratio partis *a* ad suum totum *A* æqualis fuerit rationi partis *b* ad suum totum *B*, partes *a*, *b* vocantur sibi mutuo similes.

DEFINITIO XVI.

38 *Duarum rationum illa vocatur major, cujus antecedens magis suum consequentem continet, vel minus in suo consequente continetur, quam alterius antecedens suum consequentem contineat, vel in illo contineatur*. Sic ratio numeri 10 ad numerum 3 major est ratione numeri 5 ad numerum 2, quia antecedens 10 pluries continet consequentem 3, quam antecedens 5 suum consequentem 2 comprehendat. Etenim numerus 10 *ter* continet totum 3, & unum insuper illius *trientem*. At vero numerus 5 *bis* dumtaxat complectitur nnmerum 2 cum una illius parte dimidia. Viciſſim vero ratio numeri 2 ad numerum 5 major est ratione numeri 3 ad numerum 10, quia minus antecedens 2 in consequente 5, quam antecedens 3 in consequente 10 comprehenditur.

COROLLARIUM I.

39 *Ratio major majorem exponentem habet, & quæ majorem exponentem habet, major est*. Cum enim antecedens rationis majoris magis consequentem contineat, vel minus in illo contineatur, quam alterius rationis antecedens suum consequentem complectitur, vel in illo continetur, major itidem quantitas requiritur, ut major ipsa ratio exprimatur. Et viciſſim si hujusmodi quantitas rationem denominans major fuerit, antecedens rationis suum consequentem magis comprehendet, vel minus in illo continebitur; atque adeo ratio ipsa major erit. Id porro magis adhuc perspicuum fiet, si considerare velimus, *exponentem* rationis *majoris inæqualitatis* esse

esse numerum unitate majorem (a); *exponentem* vero rationis *minoris inæqualitatis* esse numerum unitate minorem, fractionem scilicet proprie sumtam (b), eamque majorem esse, quo minus illius numerator ab ejusdem denominatore deficit (c). Hinc enim aperte constabit, antecedentem terminum rationis *majoris inæqualitatis* magis continere non posse suum consequentem, quin magnitudo, quæ majorem hanc continentiam definit, magis ac magis unitatem superet, ac proinde quin magnitudo ipsa continuo major fiat; & vicissim quantitatem hanc augeri non posse, quin antecedens suum consequentem magis contineat. Constabit quoque, antecedentem non posse in suo consequente minus comprehendi, quin fractio rationem ipsam denominans minus ab unitate deficiat, atque adeo quin continuo major evadat. Similiter hujusmodi fractionem non posse esse majorem, quin antecedens rationis ab illa denominatæ minus in suo consequente comprehendatur, ac propterea quin ipsa ratio major fiat.

COROLLARIUM II.

40 *Omnis ratio majoris inæqualitatis est major, & omnis ratio minoris inæqualitatis est minor ratione æqualitatis. Et vicissim omnis ratio major ratione æqualitatis est ratio majoris inæqualitatis, & omnis ratio minor ratione æqualitatis est ratio minoris inæqualitatis.* Etenim *exponens* rationis *majoris inæqualitatis* est major, & *exponens* rationis *minoris inæqualitatis* est minor unitate, quę rationem *æqualitatis* denominat (d). Et vicissim *exponens* rationis, quæ ratione *æqualitatis* major est, unitatem superat, & *exponens* rationis, quæ ratione *æqualitatis* est minor, ab unitate deficit; cum ille major, hic vero minor sit *exponente* rationis ęqualitatis (e). Ergo &c.

COROLLARIUM III.

41 *Proportio majoris inæqualitatis eo minor, & vicissim proportio minoris inæqualitatis eo major evadit, quo magis ad rationem æqualitatis accedunt.* Enimvero, quo magis proportio *majoris inæqua-*

(a) §. 17. (b) Ibidem. (c) Synop. Algeb. §. 101.
(d) §. 14. (e) §. 17.

inæqualitatis accedit ad rationem *æqualitatis*, eo magis illius *exponens* minuitur, quatenus continuo sui decremento proximior fit unitati, quam tamen semper superat. Contra vero *exponens* rationis *minoris inæqualitatis* eo major efficitur, quo magis ipsa proportio fit proportioni *æqualitatis* propinquior, quatenus scilicet in hujusmodi accessu illius *exponens* continuo sui augmento proximior fit unitati, a qua tamen semper deficit. Ratio autem illa major est, quæ majorem *exponentem* habet (a). Ergo &c.

HYPOTHESIS III.

42 Inæqualitas rationum iisdem plane signis, quibus inæqualitas magnitudinum, indicatur. Videlicet sicuti $a > b$ designat, magnitudinem a majorem esse magnitudine b, & $a < b$ indicat, magnitudinem a a magnitudine b deficere (b), ita $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sive $a.b > c.d$ significat, rationem magnitudinis a ad magnitudinem b majorem esse ratione termini c ad d, & $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, seu $a.b < c.d$ designat, rationem primæ a ad secundam b minorem esse ratione tertiæ c ad quartam d.

DEFINITIO XVII.

43 *Proportionalitas Geometrica*, quam Græci *analogiam* appellant, *est rationum similitudo, seu æqualitas*. Videlicet *quatuor magnitudines dicuntur geometrice proportionales, cum ratio primæ ad secundam similis est, sive æqualis rationi tertiæ ad quartam*. Ut si fuerit $a.b = c.d$, quatuor magnitudines a, b, c, d erunt geometrice inter se proportionales. Porro prima quatuor magnitudinum proportionalium dicitur *primus antecedens*, secunda *primus consequens*, tertia *secundus antecedens*, & quarta *secundus consequens*. Quoniam vero una eademque magnitudo obire

(a) §. 19. (b) Synopsis Algeb. §. 11.

obire simul potest munus *primi consequentis*, & *secundi antecedentis*, ut cum dicitur, magnitudo *a* esse ad magnitudinem *b*, quemadmodum est magnitudo *b* ad magnitudinem *c*, stat, *proportionalitatem* in tribus tantum terminis posse subsistere.

COROLLARIUM I.

44 *Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, exponens rationis, quam habet prima ad secundam, æqualis erit exponenti rationis, quam habet tertia ad quartam*. Et viciffim, *si exponens rationis, quam habet prima ad secundam, æqualis fuerit exponenti rationis, quam habet tertia ad quartam, quatuor illæ magnitudines erunt geometrice proportionales*. Etenim rationes æquales habent *exponentes* æquales, & quæ habent *exponentes* æquales, sunt inter se æquales (a).

COROLLARIUM II.

45 *Si prima quatuor magnitudinum geometrice proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor secunda, etiam tertia erit æqualis, vel major, aut minor quarta. Et si tertia fuerit æqualis, vel major, aut minor quarta, etiam prima erit æqualis, vel major, aut minor secunda*. Est enim prima ad secundam, ut tertia ad quartam, sicuti etiam tertia ad quartam, ut prima ad secundam.

HYPOTHESIS IV.

46 Proportionalitas geometrica quatuor magnitudinum *a*, *b*, *c*, *d* hoc modo exprimitur $a.b = c.d$. Hoc enim modo rationum æqualitas, ut superiori loco notavimus, designatur.

DEFINITIO XVIII.

47 Proportionalitas vel *discreta* est, vel *continua*. *Proportionalitas continua est, cum ratio secundæ magnitudinis ad tertiam di-*

(a) §. 14.

diversa ab ea non est, quam habet prima ad secundam. Discreta vero cum ratio secundi termini ad tertium diversa est a ratione primi ad secundum. *Continua* nimirum est proportio numerorum 16.8.4.2. At vero *discreta* proportio numerorum 6.3.4.2. In primo enim casu dumtaxat secundus terminus est ad tertium, ut primus ad secundum. Trium itaque magnitudinum *continuo* proportionalium secunda dicitur *media proportionalis*. Quatuor vero magnitudinum *continuo* itidem proportionalium secunda, & tertia *duæ mediæ proportionales* nuncupantur.

HYPOTHESIS V.

48 Proportionalitas continua geometrica indicatur præfigendo signum $\div\!\!\cdot$ terminis ipsis continuo inter se proportionalibus. Ut si proportionales *continuo* inter se fuerint magnitudines a, b, c, d &c. scribitur $\div\!\!\cdot\ a . b . c . d.$ &c.

Monitum.

49 Ceterum ubicumque fit mentio de terminis proportionalibus, *discreta* semper proportionalitas intelligitur, nisi ly *continuo* expresse habeatur.

DEFINITIO XIX.

50 *Magnitudines homologæ, sive ratione similes, dicuntur illæ, quæ eandem ad alias, quibus comparantur, rationem habent*. Ut si ratio magnitudinis a ad magnitudinem b similis fuerit rationi magnitudinis c ad magnitudinem d, magnitudines a, c erunt *homologæ*.

COROLLARIUM.

51 *In omni proportionalitate geometrica termini antecedentes sunt homologi*. Habent enim eandem rationem ad suos consequentes.

DEFINITIO XX.

52 *Ratio ex aliis rationibus composita vocatur illa, cujus exponens*

nens est factum ex aliarum rationum exponentibus inter se multiplicatis. Ut si *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & *exponens* rationis $\frac{c}{d}$ fuerit n, ratio, cujus *exponens* est productum mn, erit composita ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

S C H O L I O N I.

53 Ut igitur determinetur ratio ex datis quibuscumque rationibus composita, quærendi sunt illarum *exponentes*, iique inter se mutuo sunt multiplicandi. Quod enim hinc fit productum, erit *exponens* rationis quæsitæ, ejusque indolem palam efficiet.

S C H O L I O N II.

54 Quemadmodum rationum multiplicatio *exponentium* multiplicatione peragitur, ita ipsarum additio, subtractio, & divisio additione, subtractione, & divisione *exponentium* absolvuntur. Ut si *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & *exponens* rationis $\frac{c}{d}$ fuerit n, ratio ex illarum additione consurgens ea erit, cujus *exponens* est $m+n$. Quæ autem ex subtractione rationis $\frac{c}{d}$ a ratione $\frac{a}{b}$ emergit, erit illa, cujus *exponens* est $m-n$. Quæ demum nascitur ex divisione rationis $\frac{a}{b}$ per rationem $\frac{c}{d}$, ea erit, cujus *exponens* est *quotus* $\frac{m}{n}$.

DEFINITIO XXI.

55 *Ratio* duplicata *dicitur illa, quæ ex duabus* : triplicata, *quæ*

quæ ex tribus : quadruplicata , *quæ ex quatuor rationibus similibus in er se multiplicatis consurgit, atque ita deinceps*. Sic magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *duplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n , si ratio $\frac{a}{b}$ fuerit composita ex ratione $\frac{m}{n}$ ducta in seipsam. Erit vero a ad b in ratione *triplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n , si ratio $\frac{a}{b}$ fuerit composita ex tribus rationibus rationi $\frac{m}{n}$ similibus in se invicem ductis, & sic deinceps.

COROLLARIUM I.

56 *Duæ magnitudines erunt inter se in ratione aliqua* duplicata , *si ea fuerit ipsarum ratio, ut illius exponens sit factum ex datæ rationis exponente multiplicato per seipsum*. *Erunt in ratione aliqua* triplicata , *si fuerint in ea ratione, cujus exponens sit productum ex datæ rationis exponente per exponentem ejusdem duplicatæ multiplicato* &c. Ut si *exponens* rationis $\frac{m}{n}$ ponatur d , ratio $\frac{a}{b}$ erit *duplicata* rationis $\frac{m}{n}$, si fuerit $\frac{a}{b}=dd$; erit *triplicata* ejusdem $\frac{m}{n}$, si fuerit $\frac{a}{b}=ddd$, & sic de ceteris. Rationum namque compositio *exponentium* multiplicatione absolvitur (a).

COROLLARIUM II.

57 Hinc *exponens rationis* duplicatæ *est* quadratum ; *rationis* triplicatæ *est* cubus , *rationis* quadruplicatæ *est* quadrato-quadratum &c. *exponentis rationis datæ*.

SCHO-

(a) §. 52.

S C H O L I O N.

58 Si notus idcirco fuerit valor illius quantitatis, quæ datam rationem denominat, valor quoque ejusdem rationis *duplicatæ*, *triplicatæ* &c. facili negotio determinabitur. Id enim multiplicatione cogniti valoris obtinetur. Ut si *exponens* datæ rationis ponatur $d = 3$, *exponens* illius rationis, scilicet *triplæ duplicatæ* erit 9, ejusdem *triplicatæ* erit 27, & sic deinceps.

D E F I N I T I O XXII.

59 *Ratio* subduplicata datæ rationis *vocatur illa*, *ex qua ducta in seipsam data ratio efficitur*: subtriplicata, *ex qua multiplicata per seipsam duplicatam ratio data consurgit*, *atque ita deinceps*. Ut si ex ratione $\frac{a}{b}$ multiplicata per seipsam fiat ratio $\frac{m}{n}$; si ex eadem $\frac{a}{b}$ ducta in seipsam *duplicatam* consurgat ratio $\frac{r}{s}$; & si ex ipsa $\frac{a}{b}$ multiplicata per seipsam *triplicatam* oriatur ratio $\frac{x}{y}$, magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *subduplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n; in ratione *subtriplicata* magnitudinis r ad magnitudinem s; in ratione *subquadruplicata* magnitudinis x ad magnitudinem y, &c.

C O R O L L A R I U M I.

60 *Duæ magnitudines erunt inter se in ratione* subduplicata *alicujus rationis datæ*, *si quantitas*, *quæ illarum rationem denominat*, *ducta in seipsam exponentē datæ rationis efficiat*: *erunt in ratione aliqua* subtriplicata, *si illa eadem quantitas multiplicata per suum* quadratum *datæ rationis exponentem producat*, *& sic deinceps*. Ut si *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, ratio $\frac{a}{b}$ erit *subduplicata* ratio-

nis

nis $\frac{c}{d}$, si ponatur $\frac{c}{d} = mm$; erit *subtriplicata* rationis $\frac{x}{y}$, si ponatur $\frac{x}{y} = mmm$ &c.

COROLLARIUM II.

61 Hinc *exponens rationis* subduplicatæ *est radix* quadrata; *rationis* subtriplicatæ *est* radix cubica, *rationis* subquadruplicatæ *est* radix quadrato-quadrata &c. *exponentis illius rationis*, *cujus illa est subduplicata*, *subtriplicata* &c.

SCHOLION I.

62 Si notus propterea fuerit valor quantitatis, quæ datam rationem exprimit, per extractionem radicis *quadratæ* ex illa quantitate innotescet valor *exponentis* ejusdem rationis *subduplicatæ*; per extractionem radicis *cubicæ* palam fiet valor *exponentis* ejusdem rationis *subtriplicatæ* &c.

SCHOLION II.

63 Cavendum quammaxime est, ne ratio *duplicata* cum ratione *dupla*, ratio *triplicata* cum ratione *tripla* &c, sicuti etiam ratio *subduplicata* cum ratione *subdupla*, ratio *subtriplicata* cum ratione *subtripla* &c. confundatur. Etenim ratio *dupla* in eo posita est, ut antecedens suum consequentem bis contineat. At vero ratio *duplicata* rationem compositam ex data ratione in seipsam ducta designat, quæ sunt toto cœlo diversa. Idipsum de aliis dicito.

DEFINITIO XXIII.

64 *Æquationis nomine intelliguntur duæ quantitates Algebricæ, sive simplices illæ sint, sive complexæ, inter quas signum æqualitatis* = *reperitur*. Videlicet *æquationes* vocantur $a = b$, $ab + de = mr - nx$.

DE-

DEFINITIO XXIV.

65 *Membra æquationis sunt illæ quantitates, quas inter habetur signum æqualitatis* $=$. Sic quantitates $ab+de$, $mr-nx$ sunt membra *æquationis* $ab+de=mr-nx$, *primum* quidem, quod signum $=$ præcedit, scilicet $ab+de$, *secundum* vero, quod signum ipsum consequitur, nempe $mr-nx$.

Modi argumentandi.

I.

66 *Ratio inversa* est, cum sumitur consequens proportionis, veluti antecedens, & ad suum antecedentem, ut ad consequentem refertur. Nimirum si fuerit $A.a=B.b$, arguitur invertendo, cum demonstratur esse $a.A=b.B$.

SCHOLION.

67 Ex eo, quod habeatur $A.a=B.b$, arguunt nonnulli, esse $b.B=a.A$, idque *permutando* appellant. Verum cum, facta terminorum inversione, mutetur tantum locus rationum æqualium, specialis arguendi modus is haudquaquam videtur.

II.

68 *Alterna ratio* est, cum antecedens ad antecedentem, & consequens ad consequentem refertur. Ut si fuerit $A.a=B.b$, arguitur *alternando*, cum probatur esse $A.B=a.b$.

III.

69 *Compositio rationis* fit, cum summa ex antecedente, & consequente ad consequentem refertur. Ut si ponatur $A.a=B.b$, arguitur *componendo*, cum ostenditur, esse $A+a.a=B+b.b$.

IV.

70 *Divisio rationis* tunc fieri dicitur, cum excessus, quo antecedens consequentem superat, cum ipso consequente comparatur. Sic facta hypothesi, ut sit $A. a = B. b$, arguitur *dividendo*, si ostendatur, esse $A-a. a = B-b. b$.

V.

71 *Conversio rationis dividendo* tunc fit, cum excessus antecedentis supra consequentem ad ipsum antecedentem refertur. Nimirum si fuerit $A. a = B. b$, arguitur *dividendo* per *conversionem rationis*, cum ostenditur $A-a. A = B-b. B$.

VI.

72 *Conversio rationis componendo* est, cum antecedens, & consequens simul uniti, unius instar, ad antecedentem referuntur. Si nimirum fuerit $A. a = B. b$, arguitur *componendo* per *conversionem rationis*, cum ostenditur, esse $A+a. A = B+b. B$.

VII.

73 *Ratio ex æqualitate* est sumptio extremorum per subductionem mediorum. Videlicet si fuerint ex una parte tres magnitudines A, B, C, & ex alia totidem aliæ a, b, c, arguitur ex *æqualitate rationis*, cum demonstratur, prima in uno ordine esse ad ultimam in eodem ordine, ut est prima in altero ordine ad ultimam ejusdem. Verum cum magnitudines istæ debeant esse proportionales, idque dupliciter contingere possit, nimirum *ordinate*, & *perturbate*, duo casus distinguendi sunt, in quibus ex *rationis æqualitate* potest argui, videlicet cum illarum ratio est *ordinata*, & cum ratio ipsa est *perturbata*.

Tri-

Primus casus.

74 *Ordinata proportio* inter plures magnitudines diversum ordinem constituentes tunc haberi dicitur, cum prima est ad secundam in uno ordine, ut est prima ad secundam in altero ordine; & secunda ad tertiam in priori, ut est secunda ad tertiam in posteriori, & sic deinceps. Erit nimirum *ordinata proportio* in duplici hac magnitudinum serie

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \end{matrix}$$

si fuerit $A.\ B = a.\ b$, $B.\ C = b.\ c$, $C.\ D = c.\ d$. Itaque arguitur ex *aequalitate rationis* in *proportione ordinata*, cum ostenditur, esse $A.\ D = a.\ d$.

Secundus casus.

75 *Ratio perturbata* plurium magnitudinum diversum ordinem constituentium tunc habetur, cum penultima est ad ultimam in uno ordine, ut est prima ad secundam in altero ordine; antepenultima ad penultimam in uno, ut est secunda ad tertiam in altero, & sic deinceps, donec prima in posteriori ordine sit ad secundam, ut in priori est penultima ad ultimam. Sic *perturbata* est *proportio* magnitudinum in hac duplici serie

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \end{matrix}$$

Si habeatur $A.\ B = c.\ d$, $B.\ C = b.\ c$, $C.\ D = a.\ b$. Arguitur ergo ex *aequalitate rationis* in *proportione perturbata*; cum demonstratur, esse $A.\ D = a.\ d$.

Axiomata.

I.

Rationes, quae eidem, vel aequalibus sunt aequales, inter se quoque sunt aequales.

76 Ut si rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ aequales fuerint eidem rationi

 vel

$\frac{e}{f}$, vel rationibus æqualibus $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{q}$, inter se quoque æquales erunt. Si namque spectentur harum rationum *exponentes*, erunt *exponentes* rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ æquales *exponenti* rationis $\frac{e}{f}$ sicuti etiam *exponentibus* rationum $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{q}$ (a). Ergo *exponentes* rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ erunt etiam inter se æquales (b). Rationes autem illæ sunt æquales inter se, quæ æquales *exponentes* habent (c). Ergo rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ erunt æquales.

II.

Cui una duarum rationum æqualium æqualis est, altera quoque earundem est æqualis.

77 Videlicet si rationi $\frac{m}{n}$ æqualis fuerit una $\frac{a}{b}$ duarum rationum æqualium $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, altera quoque ipsarum $\frac{c}{d}$ erit eidem $\frac{m}{n}$ æqualis. Etenim stante hypothesi, *exponentes* etiam duarum $\frac{m}{n}$, $\frac{c}{d}$ erunt æquales.

Ra-

(a) §. 54.
(b) Synop. Algeb. §. 259.
(c) §. 59.

III.

Ratio, quæ uni duarum rationum æqualium æqualis est, alteri quoque earundem est æqualis.

78 Posita nempe æqualitate duarum rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si ratio $\frac{m}{n}$ æqualis fuerit rationi $\frac{a}{b}$, rationi quoque $\frac{c}{d}$ æqualis erit. Sunt enim ipsarum *exponentes* inter se æquales.

IV.

Rationes, quæ rationibus inæqualibus sunt æquales, inter se sunt inæquales.

79 Si nimirum ratio $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit rationi $\frac{m}{p}$, & ratio $\frac{c}{d}$ rationi $\frac{n}{q}$; fuerit autem ratio $\frac{m}{p}$ major ratione $\frac{n}{q}$, etiam ratio $\frac{a}{b}$ major erit ratione $\frac{c}{d}$. Sicuti namque *exponens* rationis $\frac{m}{p}$ major est per hypothesim *exponente* rationis $\frac{n}{q}$ (a), *exponens* quoque rationis $\frac{a}{b}$ *exponentem* rationis $\frac{c}{d}$ superabit (b); atque adeo ratio $\frac{a}{b}$ ratione $\frac{c}{d}$ major erit (c).

(a) §. 39.
(b) Synopsis Algeb. §. 260.
(c) §. 39.

Regulæ fundamentales

PROPORTIONUM.

PROPOSITIO I.

Si eadem magnitudo ducatur seorsim in æquales, aut æquales per eandem, vel per æquales multiplicentur, producta, quæ hinc fiunt, erunt æqualia.

80 Eadem magnitudo a seorsim multiplicetur per æquales b, b, & fiant producta ab, ab. Æquales itidem magnitudines d, d ducantur in eandem e, aut in æquales m, m, & fiant producta in priori casu de, de, in posteriori dm, dm. Dico, omnia hujusmodi producta esse *respective* inter se æqualia, videlicet esse $ab = ab$, $de = de$, $dm = dm$.

Demonstratio.

Patet quoad omnes casus ex ipsis terminis, ut jure proinde inter axiomata recenseri possit.

PROPOSITIO II.

Si eadem magnitudo per æquales seorsim, vel æquales per eandem, aut per æquales dividantur, quoti erunt æquales.

81 Magnitudo a dividatur seorsim per æquales b, b, sitque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{b} = n$. Æquales quoque magnitudines d, d dividantur per eandem e, aut per æquales f, f, sitque $\frac{d}{e} = p$, $\frac{d}{e} = q$, $\frac{d}{f} = x$, $\frac{d}{f} = y$. Dico, esse $m = n$, $p = q$, $x = y$.

De-

Demonstratio.

Hæc itidem, ut præcedens, ex terminis manifesta est.

PROPOSITIO III.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale producto mediarum.

82 Sit $a.\ b = c.\ d$. Dico, productum ad extremarum a, d æquale esse producto bc mediarum b, c.

Demonstratio.

Cum enim sit $a.\ b = c.\ d$, *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ æqualis, seu idem erit cum *exponente* rationis $\frac{c}{d}$ (a), videlicet si ponatur $\frac{a}{b} = m$, erit etiam $\frac{c}{d} = m$. Est autem $bm = a$, $dm = c$ (b). Ergo erit $bm \times d = a \times d$, sicuti etiam $dm \times b = c \times b$, sive $bmd = ad$, $dmb = cb$ (c). Manifestum porro est, esse $bmd = dmb$ (d). Ergo erit quoque $ad = cb$ (e). Itaque si fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines continuo geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale quadrato mediæ.

83 Si nimirum fuerit $\div\!\!\div\ a.\ b.\ c$, erit $ac = bb$. Si namque

(a) §. 14.
(b) §. 11.
(c) §. 10.
(d) Synopsis Algeb. §. 40.
(e) Ibidem §. 259.

que magnitudo media b bis sumatur, erit $a . b = b . c$, atque adeo $ac = bb$ (a).

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus productum extremarum sit æquale producto mediarum, illæ erunt geometrice proportionales.

84 Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus productum ad extremarum a, d sit æquale producto bc mediarum b, c. Dico, esse $a . b = c . d$.

Demonstratio.

Esto namque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, adeoque $bm = a$, $dn = c$ (b). Multiplicatis ergo membris æquationis $bm = a$ per eandem quantitatem d, sicuti etiam membris æquationis $dn = c$ per eandem quantitatem b, erit $bmd = ad$, $dnb = cb$ (c). Est autem per hypothesim $ad = bc$. Ergo erit similiter $bmd = dnb$ (d); ac proinde $\frac{bmd}{bd} = \frac{dnb}{bd}$ (e). Perspicuum porro est, esse $\frac{dmb}{bd} = m$, $\frac{dnb}{db} = n$ (f). Ergo erit $m = n$ (g). Quotus autem m est ex hypothesi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$, & quotus n *exponens* rationis $\frac{c}{d}$. Ergo erit $a . b = c . d$ (h). Igitur si fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROL-

(a) §. 82.
(b) §. 11.
(c) §. 80.
(d) Synop. Algeb. §. 259.
(e) §. 81.
(f) Synop. Algeb. §. 72.
(g) §. 11.
(h) §. 44.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines, ex quibus productum extremarum sit æquale quadrato mediæ, erunt illæ continuo inter se geometrice proportionales.

85 Erit nempe $\div\!\!\div$ *a. b. c*, si fuerit $ac = bb$. Quandoquidem hac facta hypothesi, erit $a. b = b. c$ (a); ac proinde $\div\!\!\div$ *a. b. c.*

SCHOLION.

86 Hisce propositionibus innititur *regula trium* tam *directa*, quam *inversa*, quæ ob usum amplissimum merito optimoque jure *aurea* nuncupatur. In eo igitur regula trium *directa* posita est, ut *tribus datis magnitudinibus, quarta inveniatur, ad quam ita se habeat tertia, ut se habet illarum prima ad secundam.* Regula vero trium *inversa* in eo consistit, ut *datis tribus magnitudinibus, quarta inveniatur, cujus ratio ad secundam ab ea non sit diversa, quam habet earundem prima ad tertiam.*

PROBLEMA I.

Datis tribus magnitudinibus, quartam directe proportionalem invenire.

87 Datæ sint tres magnitudines *a, b, c*. Quartam invenire oporteat, ad quam ita se habeat tertia *c*, ut se habet prima *a* ad secundam *b*.

Resolutio.

Multiplicetur secunda *b* per tertiam *c*, & factum *bc* per primam *a* dividatur. Erit $\frac{bc}{a}$ quarta proportionalis quæsita.

De-

(a) §. 84.

Demonstratio.

Etenim si ponatur $\frac{bc}{a} = d$, erit $ad = bc$ (a). Ergo $a . b = c . d$ (b).

COROLLARIUM.

88 *Positis igitur quatuor magnitudinibus Geometrice proportionalibus, quarta aequabit quotum facti ex secunda in tertiam per illarum primam divisi; prima vero aequalis erit quoto facti ex secunda in tertiam per quartam divisi.*

SCHOLION.

89 Hinc ostenditur artificium alibi traditum (c) convertendi fractionem in aliam dati nominis. Id enim per inventionem magnitudinis, ad quam ita se habeat denominator fractionis quaesitae, ut se habet denominator fractionis datae ad suum numeratorem.

PROBLEMA II.

Datis tribus magnitudinibus, quartam reciproce proportionalem invenire.

90 Datis tribus magnitudinibus a, b, c, quartam invenire oporteat, quae sit ad secundam b, ut est prima a ad tertiam c.

Resolutio.

Factum ab ex ductu primae a in secundam b dividatur per tertiam c. Quotus $\frac{ab}{c}$ erit quarta quaesita.

De-

(a) §. 11.
(b) §. 14.
(c) Synop. Algeb. §. 129.

Demonstratio.

Si namque ponatur $\frac{ab}{c} = x$, erit $cx = ab$ (a); ac proinde $a.c = x.b$ (b).

PROBLEMA III.

Datis duabus magnitudinibus mediam Geometrice proportionalem invenire:

91 Inter duas a, b mediam Geometrice proportionalem invenire oporteat.

Resolutio.

Facto ab ex ipsis magnitudinibus extrahatur radix quadrata (c). Erit $\sqrt{ab}$ media quæsita.

Demonstratio.

Etenim si fiat $\sqrt{ab} = x$, erit $xx = ab$, atque adeo $∺ a.x.b$ (d).

PROBLEMA IV.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam Geometrice proportionalem invenire.

92 Datis duabus magnitudinibus a, b, invenire oporteat tertiam Geometrice proportionalem.

(a) §. 21.
(b) §. 24.
(c) Synop. Algeb. §. 171.
(d) §. 25.

Resolutio.

Quadratum bb secundæ b dividatur per primam a. Quotus $\frac{bb}{a}$ erit tertia proportionalis quæsita.

Demonstratio.

Quandoquidem si ponatur $\frac{bb}{a} = d$, erit $ad = bb$ (a). Ergo $\div a . b . d$ (b).

PROPOSITIO V.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, vel æquales multiplicentur, producta erunt directe inter se, ut ipsæ magnitudines.

93 Duæ inæquales magnitudines a, b multiplicentur per eandem d, vel per æquales, d, d, duoque fiant producta ad, bd. Dico, esse $ad . bd = a . b$.

Demonstratio.

Est enim $adb = bda$ (c). Ergo erit $ad . bd = a . b$ (d). Itaque si duæ &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VI.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, vel per æquales dividantur, quoti erunt directe, ut ipsæ magnitudines divisæ.

94 Duæ inæquales magnitudines a, b dividantur per ean-

(a) Synop. Algeb. §. 65.
(b) §. 85.
(c) Synop. Algeb. §. 40.
(d) §. 84.

eandem d, vel per æquales d, d, sitque $\frac{a}{d} = m$, $\frac{b}{d} = n$.

Dico, esse $m.\ n. = a.\ b.$

Demonstratio.

Stante namque hypothesi, erit $dm = a$, $dn = b$ (a), ac proinde $dnm = na$, $dmn = mb$ (b). Est autem $dmn = dnm$ (c). Ergo erit etiam $mb = na$ (d); atque adeo $m.\ n = a.\ b$ (e). Itaque si duæ inæquales magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, aut per æquales multiplicentur, vel dividantur, facta in primo casu, quoti in secundo erunt inæquales.

95 Sunt enim tam facta, quam quoti, ut ipsæ magnitudines.

PROPOSITIO VII.

Si eadem magnitudo per duas inæquales dividatur, quoti erunt suis divisoribus reciproce proportionales.

96 Magnitudo a dividatur primo per b, deinde per c, sitque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$. Dico, esse $m.\ n = c.\ b.$

Demonstratio.

Cum enim sit per hypothesim $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$; erit $bm = a$, $cn = a$ (f); atque adeo $bm = cn$ (g). Est autem bm pro-

(a) §. 35.
(b) §. 10.
(c) Synop. Algeb. §. 40.
(d) Ibidem §. 259.
(e) §. 34.
(f) §. 11.
(g) Synop. Algeb. §. 259.

productum extremarum m, b, & cn est productum mediarum n, c. Ergo erit $m.\ n = c.\ b$ (a). Itaque si eadem magnitudo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Quotus magnitudinis divisæ per majorem terminum est minor quotiente ejusdem magnitudinis per minorem divisæ.

97 Ut si fuerit $b > c$, erit $m < n$. Ostensum est enim, esse $m.\ n = c.\ b$.

PROPOSITIO VIII.

Si fuerint quatuor magnitudines, quarum prima majorem rationem habeat ad secundam, quam tertia ad quartam, productum extremarum majus e it producto mediarum. Si vero ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, productum extremarum erit minus producto mediarum.

I.

98 Esto $a.\ b > c.\ d$. Dico, productum ad extremarum a, d majus esse producto bc mediarum b, c.

Demonstratio.

Quoniam est $a.\ b > c.\ d$, *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ major erit *exponente* rationis $\frac{c}{d}$ (b). Ponatur ergo $\frac{a}{b} = m + n$, $\frac{c}{d} = m$. Igitur erit $bm + bn = a$, $dm = c$ (c). Multiplicatis idcirco membris æquationis $bm + bn = a$ per quantitatem d, sicuti

(a) §. 84. (b) §. 89. (c) §. 81.

cuti etiam membris æquationis $dm = c$ per quantitatem b, erit $bmd + bnd = ad$, $dmb = cb$ (a). Eſt autem $bmd + bnd > dmb$ (b); cum ſit $bmd = dmb$ (c). Ergo erit quoque $ad > cb$ (d).

II.

99 Modo autem ſit $a. b < c. d.$ Dico, eſſe $ad < bc$, productum ſcilicet extremarum a producto mediarum deficere.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti, ſi nimirum ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = m + n$. Erit enim $dm + dn = c$, & $bm = a$; ac proinde $ad < bc$; cum jam ſit $bmd < dmb + dnb$, ut patet. Itaque ſi fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO IX.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus productum extremarum ſit majus producto mediarum, prima habebit majorem rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam. Si vero productum extremarum fuerit minus producto mediarum, ratio prima ad ſecundam erit minor ratione tertia ad quartam.

I.

100 Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus productum ad extremarum a, d ſit majus producto bc mediarum b, c. Dico, eſſe $a. b > c. d$.

De-

(a) §. 80.
(b) Synop. Algeb. §. 257.
(c) Ibid. §. 258.
(d) Ibidem §. 260.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$; atque adeo $bm = a$, $dn = c$ (a).

Igitur multiplicatis membris æquationis $bm = a$ per eandem quantitatem d, & membris æquationis $dn = c$ per quantitatem b, erit $bmd = ad$, $dnb = cb$ (b). Est autem per hypothesim $ad > bc$. Ergo erit quoque $bmd > dnb$ (c). Constat autem, esse $\frac{bmd}{bd} = m$, $\frac{dnb}{bd} = n$ (d). Igitur erit $m > n$ (e). Quotus autem m denominat rationem $\frac{a}{b}$, & quotus n rationem $\frac{c}{d}$ per hypothesim. Ergo erit $a . b > c . d$ (f).

II.

101 Vicissim vero productum ad extremarum a, d sit minus producto bc mediarum b, c. Dico, esse $a . b < c . d$.

Demonstratio.

Coincidit vero præcedenti. Quandoquidem facta eadem hypothesi, ut sit $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, erit $bdm < dnb$, quemadmodum tunc est $ad < bc$. Ergo erit quoque $m < n$; ac proinde $a . b < c . d$. Itaque si fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

THEO-

(a) §. 11.
(b) §. 80.
(c) Synop. Algeb. §. 260.
(d) Ibidem §. 72.
(e) § 94.
(f) §. 89.

T H E O R I A

Proportionis, & proportionalitatis Geometricæ.

T H E O R E M A I.

Magnitudines æquales eandem ad eundem, vel æquales terminos rationem habent; & vicissim quæ eandem ad eundem, vel æquales terminos rationem habent, sunt æquales.

102 Sint duæ magnitudines æquales a, b. Dico, eandem esse utriusque rationem ad eundem, vel æquales terminos x, x, nimirum esse $a.\ x = b.\ x$. Euclid. l.V p 7.

Demonstratio.

Enimvero cum sit per hypothesim $a = b$, si ponatur $\frac{a}{x} = m$, erit etiam $\frac{b}{x} = m$ (a). Ergo erit quoque $a.\ x = b.\ x$ (b). Est enim quotus m *exponens* utriusque rationis $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$ (c).

I I.

103 Vicissim magnitudines a, b eandem rationem habeant ad eundem, vel æquales terminos x, x, esto nimirum $a.\ x = b.\ x$. Dico, esse $a = b$. Euclid. l.V.p.9.

De-

(a) § 21.
(b) §. 44.
(c) §. 8.

Demonstratio.

Cum enim sit per hypothesim $\frac{a}{x} = \frac{b}{x}$, si ponatur $\frac{a}{x} = m$, erit etiam $\frac{b}{x} = m$ (a); ac proinde $xm = a$, $xm = b$ (b). Ergo erit $a = b$ (c). Magnitudines igitur æquales &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Fractiones illæ sunt inter se æquales, quæ eandem ad suum denominatorem rationem habent.

104 Fractiones nimirum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ æquales erunt inter se, si ratio numeratoris a ad denominatorem b diversa ab ea non fuerit, quam habet numerator c ad denominatorem d. Cum enim fractio quæcunque sit ad unitatem, ut ipsius numerator ad suum denominatorem, erit $\frac{a}{b}. 1 = a.b$, & $\frac{c}{d}. 1 = c.d$ (d). Est autem per hypothesim $a.b = c.d$. Ergo erit $\frac{a}{b}. 1 = \frac{c}{d}. 1$ (e); atque adeo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (f).

SCHOLION.

105 Hinc manifestum efficitur, quod diximus in *Algebræ Synopsi* §. 107, videlicet *fractiones esse ejusdem valoris, seu æquales inter se, cum earum numeratores sunt eadem pars, vel eadem partes suorum denominatorum*. Quandoquidem numeratores fractionum esse eandem partem, vel easdem partes suorum

(a) § 44.
(b) §. 11.
(c) Synopsis Algeb. §. 259.
(d) §. 12.
(e) §. 76.
(f) §. 103.

rum denominatorum idem est omnino, ac ipsarum numeratores eandem ad suos denominatores rationem habere (a).

COROLLARIUM II.

Illæ fractiones sunt æquales inter se, quarum numeratores in mutuos denominatores ducti, producta æqualia efficiunt.

106 Æquales nempe erunt inter se duæ fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si factum ex multiplicatione numeratoris a fractionis $\frac{a}{b}$ per denominatorem d fractionis $\frac{c}{d}$, scilicet ad, fuerit æquale producto cb, quod oritur ex ductu numeratoris c fractionis $\frac{c}{d}$ in denominatorem b fractionis $\frac{a}{b}$. Etenim, si fuerit $ad = bc$, erit $a.\ b = c.\ d$ (b). Ergo erit quoque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (c).

SCHOLION

107 Hinc patet methodus dignoscendi, an duæ fractiones sint æquales inter se, num vero inæquales.

COROLLARIUM III.

Si duo cujusvis fractionis termini per eandem quantitatem multiplicentur, fractio ex hisce productis facta ejusdem cum illa valoris erit.

108 Ut si termini a, b fractionis $\frac{a}{b}$ multiplicentur per eandem quantitatem d, & ex productis ad, bd fiat fractio

(a) §. 2. (b) §. 84. (c) §. 104.

$\frac{ad}{bd}$, hęc erit ejusdem valoris cum fractione $\frac{a}{b}$. Constat enim, esse $ad \cdot bd = a \cdot b$ (a). Ergo erit $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ (b).

SCHOLION.

109 Ex hoc patet generalis demonstratio reductionis fractionum dissimilium ad idem nomen. In hujusmodi namque reductione termini fractionis per eandem quantitatem multiplicantur (c).

COROLLARIUM IV.

Si duo cujusvis fractionis termini per eandem quantitatem dividantur, fractio ex quotientibus facta ejusdem cum illa valoris erit.

110 Videlicet si termini a, b fractionis $\frac{a}{b}$ dividantur per eandem quantitatem c, ita ut sit $\frac{a}{c} = d$, $\frac{b}{c} = e$, & ex quotis d, e fiat fractio $\frac{d}{e}$, erit $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$. Perspicuum namque cum sit, esse $d \cdot e = a \cdot b$ (d), res quoque perspecta erit, esse $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$ (e).

SCHOLION.

111 Huic propositioni innititur artificium alibi traditum (f) reducendi fractionem quamcumque ad minimos terminos. Constat enim, illud in eo totum positum esse, ut termini datę fractionis per maximam communem mensuram dividantur.

THEO

(a) §. 93. (b) §. 104. (c) Synopsis Algeb. §. 116.
(d) §. 94. (e) §. 104. (f) Synopsis Algeb. §. 115.

THEOREMA II.

Eadem magnitudo eandem ad æquales terminos rationem habet. Et vicissim illæ magnitudines sunt æquales inter se, ad quas eadem magnitudo eandem habet rationem.

I.

112 Eadem magnitudo a referatur ad binas æquales b, c. Dico, esse $a . b \rightleftharpoons a . c$. Euclid. l. V. p. 7.

Demonstratio.

Cum enim sit $b \rightleftharpoons c$, si ponatur $\frac{a}{b} \rightleftharpoons m$, $\frac{a}{c} \rightleftharpoons n$, erit $m \rightleftharpoons n$ (a). Sunt autem quoti m, n *exponentes* rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ (b). Ergo erit $a . b \rightleftharpoons a . c$ (c).

II.

113 Vicissim magnitudo a eandem habeat rationem ad magnitudines b. c. Dico, esse $b \rightleftharpoons c$. Euclid. l. V. p. 9.

Demonstratio.

Enimvero cum sit per hypothesim $\frac{a}{b} \rightleftharpoons \frac{a}{c}$, si ponatur $\frac{a}{b} \rightleftharpoons m$, erit etiam $\frac{a}{c} \rightleftharpoons m$ (d). Est autem $bm \rightleftharpoons a$, $cm \rightleftharpoons a$

(a) §. 82.
(b) §. 8.
(c) §. 14.
(d) §. 14.

(a). Ergo erit $bm = cm$ (b). Constat autem, esse $\frac{bm}{m} = b$, $\frac{cm}{m} = c$ (c). Igitur erit $b = c$ (d). Eadem itaque magnitudo &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

Major magnitudo majorem, quam minor, ad eundem terminum rationem habet; & quæ majorem ad eundem terminum rationem habet, major est.

I.

Euclid. l.V.p.8. 114 Magnitudo a sit major magnitudine b. Utraque autem ad magnitudinem d referatur. Dico, esse $a.d > b.d$.

Demonstratio.

Esto $\frac{a}{d} = m$, $\frac{b}{d} = n$. Erit $m, n = a.b$ (e). Est autem $a > b$ per hypothesim. Ergo erit etiam $m > n$ (f). Quotus porro m est *exponens* rationis $\frac{a}{d}$, & quotus n rationis $\frac{b}{d}$ (g). Ergo erit $a.d > b.d$ (h).

II.

Euclid. l.V.p.10. 115 Vicissim vero sit $a.d > b.d$. Dico, esse $a > b$.

De-

(a) §. 11.
(b) Synop. Algeb. §. 259.
(c) Ibidem §. 72.
(d) §. 81.
(e) §. 94.
(f) §. 45.
(g) §. 8.
(h) §. 29.

Demonstratio.

Cum enim sit $a.\,d > b.\,d$, si ponatur $\frac{a}{d} = m$; $\frac{b}{d} = n$, erit $m > n$ (a); atque adeo $md > nd$ (b). Est autem $md = a$, $nd = b$ (c). Ergo erit quoque $a > b$ (d). Major itaque magnitudo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Illa fractio est major, cujus numerator majorem ad suum denominatorem rationem habet.

116 Videlicet fractio $\frac{a}{b}$ major erit fractione $\frac{c}{d}$, si fuerit $a.\,b > c.\,d$. Enimvero, cum sit $\frac{a}{b}.\,1 = a.\,b$, & $\frac{c}{d}.\,1 = c.\,d$ (e), non potest esse $a.\,b > c.\,d$, nisi etiam sit $\frac{a}{b}.\,1 > \frac{c}{d}.\,1$ (f); atque adeo quin itidem habeatur $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (g).

COROLLARIUM II.

Fractio illa est major, cujus numerator ductus in alterius fractionis denominatorem majus productum efficit.

117 Fractio nimirum $\frac{a}{b}$ major erit fractione $\frac{c}{d}$, si factum ad

(a) §. 39.
(b) §. 93.
(c) §. 11.
(d) Synopsis Algeb. §. 260.
(e) §. 12.
(f) §. 79.
(g) §. 115.

ad ex multiplicatione numeratoris a per denominatorem d majus fuerit producto cb, quod ex multiplicatione numeratoris c per denominatorem b efficitur. Quandoquidem, si fuerit $ad > cb$, erit $a.\ b > c.\ d$ (a). Non potest autem esse $a.\ b > c.\ d$, quin sit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (b). Ergo si fuerit $ad > cb$, erit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

S C H O L I O N.

118 Datis idcirco duabus fractionibus dissimilibus, facile erit dignoscere, an æquales sint inter se, num vero inæquales; & si inæquales, quænam illarum sit major.

T H E O R E M A IV.

Eadem magnitudo minorem ad majorem, quam ad minorem terminum rationem habet. Et vicissim terminus ille major est, ad quem eadem magnitudo minorem rationem habet.

I.

Euclid. l.V.p.8. 119 Eadem magnitudo a ad inæquales b, c referatur, sitque $b > c$. Dico, esse $a.\ b < a.\ c$.

Demonstratio.

Esto namque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$. Igitur erit $m.\ n = c.\ b$ (c). Est autem per hypothesim $c < b$. Ergo erit etiam $m < n$ (d). Quoti autem m, n sunt exponentes rationum a

(a) §. 100.
(b) §. 118.
(c) §. 96.
(d) §. 45.

$\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ (a). Ergo erit $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$; sive $a.\ b < a.\ c$ (b).

II.

120 Vicissim vero sit $a.\ b < a.\ c$. Dico, esse $b > c$. Euclid. l.V.p.10

Demonstratio.

Quoniam est per hypothesim $a.\ b < a.\ c$, si ponatur $\frac{a}{b} \sqsubset m$, $\frac{a}{c} \sqsubset n$, erit $m < n$ (c). Est autem $m,\ n \sqsubset c.\ b$ (d). Ergo erit $c < b$, sive $b > c$ (e). Eadem itaque magnitudo &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam invertendo, proportionales erunt.

121 Esto $A.\ a \sqsubset B.\ b$. Dico, etiam *invertendo* esse $a.\ A \sqsubset b.\ B$.

Demonstratio.

Enimvero cum sit $A.\ a \sqsubset B.\ b$, erit $Ab \sqsubset aB$ (f). Est autem aB productum extremarum a, B, & Ab est productum mediarum A, b. Ergo erit $a.\ A \sqsubset b.\ B$ (g). Itaque si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

CO-

(a) §. 8.
(b) §. 39.
(c) §. 39.
(d) §. 96.
(e) §. 45.
(f) §. 82.
(g) §. 84.

COROLLARIUM.

In omni proportionalitate Geometrica termini consequentes sunt homologi

122 Eadem enim eſt ipſorum ratio ad ſuos antecedentes.

THEOREMA VI.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam, quam tertia ad quartam, facta inverſione, habebit ſecunda minorem rationem ad primam, quam habeat quarta ad tertiam. Et viciſſim ſi prima habuerit ad ſecundam minorem rationem, quam tertia ad quartam, ratio ſecundæ ad primam major erit ratione quartæ ad tertiam.

I.

Pappus l. VII. p. 7'

123 Eſto $A.a > B.b$. Dico, *invertendo* eſſe $a.A < b.B$.

Demonſtratio.

Etenim cum ſit $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (a). Eſt autem Ab productum mediarum A, b, & aB eſt productum extremarum a, B. Ergo habebitur $a.A < b.B$ (b).

II.

124 Viciſſim vero ſit $A.a < B.b$. Dico, *invertendo* eſſe $a.A > b.B$.

De-

(a) §. 98.
(b) §. 101.

Demonstratio.

Est enim hoc ipso $\mathcal{A}b < aB$ (a). Ergo erit $a . \mathcal{A} > b . B$ (b). Itaque si prima quatuor magnitudinum &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam alternatim sumtæ proportionales erunt.

125 Esto $\mathcal{A} . a \sqsubset B . b$. Dico, etiam *alternando*, esse $\mathcal{A} . B \sqsubset a . b$. Euclid. l.V.p 16

Demonstratio.

Quandoquidem cum sit $\mathcal{A} . a \sqsubset B . b$, erit $\mathcal{A}b \sqsubset aB$ (c.) Facta autem alternatione, $\mathcal{A}b$ est adhuc productum extremarum, & aB, sive Ba est productum mediarum. Ergo erit $\mathcal{A} . B \sqsubset a . b$ (d). Itaque si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Partes similes duarum magnitudinum sunt directe inter se, ut ipsæ magnitudines.

126 Nimirum si magnitudines a, b fuerint partes similes aliquotæ, vel aliquantæ duarum magnitudinum $\mathcal{A}$, B, eam partes ipsæ rationem habebunt inter se, quam habent ipsæ magnitudines. Cum enim per hypothesim sit $a . \mathcal{A} \sqsubset b . B$ (e), erit etiam $a . b \sqsubset \mathcal{A} . B$ (f).

Z COROL-

(a) § 99.
(b) §. 100.
(c) §. 82.
(d) § 84.
(e) §. 37.
(f) § 125.

COROLLARIUM II.

Magnitudines totales sunt directe inter se, ut partes ipsarum similes.

127 Demonstratio eadem est cum præcedenti.

COROLLARIUM III.

Si prima quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor tertia, etiam secunda erit æqualis, vel major, aut minor quarta. Similiter si secunda fuerit æqualis, vel major, aut minor quarta, etiam prima erit æqualis vel major, aut minor tertia.

128 Posita nempe analogia $a.\ b = c.d$, si fuerit $a = c$, vel $a > c$, aut $a < c$, erit etiam $b = d$, vel $b > d$, aut $b < d$. Similiter erit $a = c$, si fuerit $b = d$, vel $a > c$, si fuerit $b > d$; aut demum $a < c$, si fuerit $b < d$. Etenim cum sit $a.\ b = c.\ d$, erit quoque $a.\ c = b.d$ (a); ac proinde &c. (b).

THEOREMA VIII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad secundam, quam tertia ad quartam, erit alternando ratio primæ ad tertiam major ratione secundæ ad quartam. Similiter si ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, erit quoque ratio primæ ad tertiam minor ratione secundæ ad quartam.

I.

Pappus l. VII. p. 5. 129 Sit $A.\ a > B.\ b$. Dico, etiam *alternando*, esse $A.B > a.b$.

De-

(a) §. 125.
(b) §. 45.

Demonstratio.

Si namque fuerit $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (a). Et si fuerit $Ab > aB$, erit quoque $A.B > a.b$ (b).

II.

130 Sit vero $A.a < B.b$. Dico, itidem *alternando*, esse $A.B. < a.b$.

Demonstratio.

Demonstratur eodem modo. Habetur enim hoc ipso $Ab < aB$ [c]; ac proinde $A.B < a.b$ (d). Itaque si prima &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si prima quatuor magnitudinum habuerit majorem rationem ad secundam, quam tertia ad quartam; fuerit autem secunda æqualis quartæ, prima erit major tertia; erit vero minor, si ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, fueritque itidem secunda æqualis quartæ.

131 Videlicet si fuerit $A.a > B.b$, & $a = b$, erit $A > B$. Si vero fuerit $A.a < B.b$, & $a = b$, erit $A < B$. Facta namque hypothesi, ut sit $A.a > B.b$, erit etiam $A.B > a.b$ (e). Ratio autem termini a ad terminum b est ratio æqualitatis per hypothesim. Ergo ratio termini A ad terminum B erit ratio majoris inæqualitatis (f); ac proinde erit $A > B$. Similiter si fuerit $A.a < B.b$, erit $A.B < a.b$ (g). Est autem $\frac{a}{b}$ ratio æqualitatis per hypothesim. Ergo ratio $\frac{A}{B}$ erit minoris inæqualitatis (h); atque adeo habebitur $A < B$ (i).

(a) §. 98.
(b) §. 100.
(c) §. [illegible].
(d) §. 101.
(e) §. 129.
(f) §. 40.
(g) §. 130.
(h) §. 40.
(i) §. 46.

THEOREMA IX.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam composita proportionales erunt.

Euclid. l.V.p.18 132 Esto $A.a \sqsupset B.b$. Dico, etiam *componendo*, esse $A + a.a \sqsupset B + b.b$.

Demonstratio.

Cum enim sit $A.a \sqsupset B.b$, erit $Ab \sqsupset aB$ (a); ac proptérea erit etiam $Ab + ab \sqsupset aB + ab$ (b). Est autem $Ab + ab$ productum extremarum $A + a, b$, & $aB + ab$ est productum mediarum $a, B + b$ (c). Ergo erit $A + a.a \sqsupset B + b.b$ (d). Si quatuor itaque magnitudines &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA X.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad secundam, quam tertia ad quartam, etiam componendo, prima cum secunda majorem rationem habebit ad secundam, quam tertia simul cum quarta ad quartam. Similiter si ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, ratio itidem primæ cum secunda ad secundam minor erit ratione tertiæ cum quarta ad quartam.

I.

Pappus l.VII.p.4 133 Esto $A.a > B.b$. Dico, etiam *componendo*, esse $A + a.a > B + b.b$.

Demonstratio.

Enimvero cum sit $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (e), adeoque $Ab + ab > aB + ab$ (f). Est autem $Ab + ab$ productum extrema-

(a) §. 82.
(b) Synop. Algeb. §. 265.
(c) Ibidem §. 59.
(d) §. 84.
(e) §. 92.
(f) Synop. Algeb. §. 268.

tremarum $\mathcal{A} + a, b$, & $aB + ab$ eſt productum mediarum $a, B + b$ (a). Ergo erit $\mathcal{A} + a . a > B + b . b$ (b).

II.

134 Sit vero $\mathcal{A} . a < B . b$. Dico, *componendo*, eſſe $\mathcal{A} + a . a < B + b . b$.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Erit enim $\mathcal{A}b < aB$ (c), ac proinde $\mathcal{A}b + ab < aB + ab$ (d). Igitur erit quoque $\mathcal{A} + a . a < B + b . b$ (e). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam diviſæ proportionales erunt.

135 Eſto $\mathcal{A} . a \eqsim B . b$. Dico, eſſe $\mathcal{A} - a . a \eqsim B - b . b$.

Demonſtratio.

Etenim cum ſit per hypotheſim $\mathcal{A} . a \eqsim B . b$, erit $\mathcal{A}b \eqsim aB$ $\mathcal{A}$); ac proinde $\mathcal{A}b - ab = aB - ab$ (g). Conſtat autem, $\mathcal{A}b - ab$ eſſe productum extremarum $\mathcal{A} - a, b$, & $aB - ab$ eſſe productum mediarum $a, B - b$ (h). Ergo erit $\mathcal{A} - a . a \eqsim B - b . b$ (i). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum. Euclid. l. V. p. 17

THEO-

(a) Synop. Algeb. §. 59.
(b) §. 100.
(c) §. 99.
(d) Synopſis Algeb. §. 258.
(e) §. 101.
(f) §. 82.
(g) Synópſis Algeb. §. 266.
(h) Ibidem 59.
(i) 84.

THEOREMA XII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad secundam, quam tertia ad quartam, etiam dividendo, habebit prima majorem rationem ad secundam, quam tertia ad quartam. Similiter si ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, etiam dividendo, ratio primæ ad secundam minor erit ratione tertiæ ad quartam.

I.

Pappus L.VII.p 5

136 Sit $A.a > B.b$. Dico, etiam *dividendo*, esse $A-a.\,a > B-b.\,b$.

Demonstratio.

Cum enim habeatur per hypothesim $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (a); atque adeo $Ab-ab > aB-ab$ (b). Est autem $Ab-ab = \overline{A-a} \times b$, sicuti etiam $aB-ab = a \times \overline{B-b}$ (c). Ergo erit $A-a.\,a > B-b.\,b$ (d).

II.

137 Sit $A.a < B.b$. Dico, *dividendo*, esse $A-a.\,a < B-b.\,b$.

Demonstratio.

Ostenditur eodem modo. Nam cum propter hypothesim sit $Ab < aB$ (e), adeoque $Ab-ab < aB-ab$ (f); sitque $Ab-ab = \overline{A-a} \times b$, quemadmodum etiam $aB-ab = a \times \overline{B-b}$

(a) §. 98.
(b) Synop. Algeb. §. 269.
(c) Ibidem §. 59.
(d) §. 100.
(e) §. 99.
(f) Synop. Algeb. §. 269.

$\overline{B-b}$ (a), erit $A-a.\,a < B-b.\,b$ (b). Itaque si prima &c. quod erat ostendendum.

T H E O R E M A XIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam composita per conversionem rationis proportionales erunt.

138 Esto $A.\,a = B.\,b$. Dico, etiam *componendo* per *conversionem rationis*, esse $A+a.\,A = B+b.\,B$.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim sit $Ab = aB$ (c), erit etiam $Ab+AB = aB+AB$ (d). Est autem $Ab+AB$ productum mediarum $A, B+b$, & $aB+AB$ est productum extremarum $A+a, B$ (e). Ergo erit $A+a.\,A = B+b.\,B$ (f). Itaque si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

T H E O R E M A XIV.

Si prima quatuor magnitudinum majorem habuerit rationem ad secundam, quam tertia ad quartam, componendo per conversionem rationis, prima cum secunda minorem rationem habebit ad primam, quam tertia cum quarta ad tertiam. Si vero ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, componendo per conversionem rationis, ratio primæ cum secunda ad primam major erit ratione tertiæ cum quarta ad tertiam.

I.

139 Sit $A.\,a > B.\,b$. Dico, *componendo* per *conversionem rationis*, esse $A+a.\,A < B+b.\,B$. Pappus l. VII. p. 6.

Dem-

(a) Ibidem §. 19.
(b) §. 102.
(c) §. 82.
(d) Synop. Algeb. §. 161.
(e) Ibidem §. 58.
(f) §. 84.

Demonstratio.

Quippe cum sit $\mathcal{A}.a > B.b$, erit $\mathcal{A}b > aB$ (a) ac proinde $\mathcal{A}b + \mathcal{A}B > aB + \mathcal{A}B$ (b). Est autem $aB + \mathcal{A}B = \overline{\mathcal{A} + a} \times B$, & $\mathcal{A}b + \mathcal{A}B = \mathcal{A} \times \overline{B + b}$ (c). Ergo erit $\mathcal{A} + a.\mathcal{A} < B + b.B$ (d).

II.

140 Sit vero $\mathcal{A}.a < B.b$. Dico, *componendo* per *conversionem rationis*, esse $\mathcal{A} + a.\ A > B + b.B$.

Demonstratio.

Coincidit cum præcedenti. Quandoquidem cum propter hypothesim habeatur $Ab < aB$ (e); ac proinde $aB + AB > Ab + AB$ (f), productum extremarum $\overline{A + a}, B$ majus erit producto mediarum $A, \overline{B + b}$. Quamobrem erit $A + a.A > B + b.B$ (g). Itaque si prima &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ per conversionem rationis proportionales erunt.

141 Esto $A.a = B.b$. Dico, etiam *dividendo* per *conversionem rationis*, esse $A - a.\ A = B - b.B$.

Demonstratio.

Cum enim sit $A.a = B.b$, erit $Ab = aB$ (h); ac propterea habe-

(a) §. 91.
(b) Synopsis Algeb. §. 261.
(c) Ibidem §. 59.
(d) §. 101.
(e) §. 99.
(f) Synop. Algeb. §. 268.
(g) §. 100.
(h) §. 82.

habebitur etiam $AB - aB = AB - Ab$ (a). Est autem $AB - aB = \overline{A-a}\times B$, ficuti etiam $AB - Ab = A\times\overline{B-b}$ (b); atque adeo productum extremarum $A-a, B$ æquale producto mediarum $A, B-b$. Ergo erit quoque $A-a.\,A = B-b.\,B$ (c). Itaque fi quatuor magnitudines &c. quod erat oftendendum.

THEOREMA XVI.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad fecundam, quam tertia ad quartam, dividendo per converfionem rationis, exceffus primæ fupra fecundam habebit majorem rationem ad primam, quam exceffus tertiæ fupra quartam ad tertiam. Si vero ratio primæ ad fecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, exceffus primæ fupra fecundam habebit minorem rationem ad primam, quam exceffus tertiæ fupra quartam ad tertiam.

I.

142 Sit $A.a > B.b$. Dico, *dividendo* per *converfionem rationis*, effe $A-a.\,A > B-b.\,B$. Pappus l. VII. p 5.

Demonftratio.

Etenim, cum fit $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (d); atque adeo erit etiam $AB - aB > AB - Ab$ (e). Eft autem $AB - aB = \overline{A-a}\times B$, ficuti etiam $AB - Ab = Ab\times\overline{B-b}$ (f). Ergo erit $A-a.\,A > B-b.\,B$ (g).

II.

143 Sit modo $A.a < B.b$. Dico, effe $A-a.\,A < B-b.\,B$.

A a De-

(a) Synop. Algeb, §. 266.
(b) Ibidem §. 59.
(c) §. 84.
(d) §. 98.
(e) Synop. Algeb. §. 269.
(f) Ibidem §. 60.
(g) §. 100.

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit $A.a < B.b$, erit $Ab < aB$ (a); ac proinde $AB - aB < AB - Ab$ (b). Conſtat autem, eſſe $\overline{AB - aB} = \overline{A - a} \times B$, & $AB - Ab = A \times \overline{B - b}$ (c). Ergo erit $A - a . A < B - b . B$. (d). Igitur ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVII.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, ſumma omnium antecedentium erit ad ſummam omnium conſequentium, ut una ex antecedentibus ad unam ex conſequentibus.

Euclid. l. V. p. 12. 144 Sint quotcunque magnitudines proportionales, videlicet $A.a = B.b = D.d$. Dico, eſſe $A + B + D . a + b + d = A.a$.

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit $A.a = B.b = D.d$, ſi ponatur $\frac{A}{a} = m$, erit quoque tam $\frac{B}{b}$, quam $\frac{D}{d} = m$ (e); & ideo $am = A$, $bm = B$, $dm = D$ (f), nec non $am + bm + dm = A + B + D$ (g). Igitur $\frac{am + bm + dm}{a + b + d} = \frac{A + B + D}{a + b + d}$ (h). Eſt autem $\frac{am + bm + dm}{a + b + d} = m$ (i). Ergo erit quoque $\frac{A + B + D}{a + b + d} = m$ (k). Conſtat porro,

(a) §. 99
(b) Synop. Algeb. §. 269.
(c) Ibidem §. 60.
(d) §. 101.
(e) §. 14.
(f) §. 11.
(g) Synop. Algeb. §. 265.
(h) §. 81.
(i) Synop. Algeb. §. 72.
(k) §. 81.

ro, esse per hypothesim $\frac{A}{a} = m$ Ergo erit $\frac{A+B+D}{a+b+d} = \frac{A}{a}$, sive $A+B+D.\ a+b+d = A.\ a$ (a). Itaque si fuerint quotcunque magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si duabus magnitudinibus duæ similes magnitudines addantur, summæ, quæ hinc emergunt, erunt, ut datæ magnitudines.

145 Ut si magnitudines a, b similes fuerint duabus A, B, erit $A+a.\ B+b. = A.B.$ Etenim, cum per hypothesim sit $A.\ B = a.b$ (b), erit quoque $A+a\ B+b = A.B$ (c).

THEOREMA XVIII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad secundam, quam tertia ad quartam, summa antecedentium minorem rationem habebit ad summam consequentium, quam prima ad secundam. Si vero ratio primæ ad secundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, summa antecedentium majorem rationem habebit ad summam consequentium, quam habeat illarum prima ad secundam.

I.

146 Esto $A.\ a > B.\ b$. Dico, esse $A+B.\ a+b < A.a.$ Pappus LVII. p. 6.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit $A.\ a > B.\ b$, erit $Ab > aB$ (d); ac proinde si utrumque productum adiiciatur eidem Aa, erit

A a 2 $Aa+$

(a) §. 34.
(b) §. 37.
(c) §. 144.
(d) §. 28.

$\mathcal{A}a + aB < \mathcal{A}a + \mathcal{A}b$ (a). Eſt autem $\mathcal{A}a + aB$ productum extremarum $\mathcal{A}+B$, a, & $\mathcal{A}a + \mathcal{A}b$ eſt productum mediarum $a+b$, $\mathcal{A}$, ut eſt evidens (b). Ergo erit $\mathcal{A}+B . a+b < \mathcal{A} . a$ (c).

II.

147 Sit vero $\mathcal{A} . a < B . b$. Dico, eſſe $\mathcal{A}+B . a+b > \mathcal{A} . a$.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Quandoquidem ſtante hypotheſi, erit $\mathcal{A}b < aB$ (d); atque adeo $\mathcal{A}a + aB > \mathcal{A}a + \mathcal{A}b$ (e). Igitur erit quoque $\mathcal{A}+B . a+b > \mathcal{A} . a$ (f). Itaque ſi prima quatuor magnitudinum &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIX.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam erit etiam reliqua ad reliquam, ut eſt tota ad totam.

Euclid. l. V. p. 19. 148 Magnitudinibus $\mathcal{A}$, B demantur partes a, b; ſitque $\mathcal{A} . B = a . b$. Dico, eſſe $\mathcal{A}-a . B-b = \mathcal{A} . B$.

Demonſtratio.

Etenim ob hypotheſim erit $\mathcal{A}b = Ba$ (g); ac propterea $\mathcal{A}B - aB = \mathcal{A}B - b\mathcal{A}$ (h). Eſt autem $\mathcal{A}B - aB$ productum extremarum $\mathcal{A}-a$, B, & $\mathcal{A}B - b\mathcal{A}$ productum mediarum $B-b$, $\mathcal{A}$, ut patet. Ergo erit $\mathcal{A}-a . B-b = \mathcal{A} . B$ (i). Itaque ſi fuerit &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Synopſis Algeb. §. 263.
(b) Ibidem §. 59.
(c) §. 100.
(d) §. 99.
(e) Synop. Algeb. §. 258.
(f) §. 100.
(g) §. 82.
(h) Synop. Algeb. §. 266.
(i) §. 84.

COROLLARIUM.

Partes similes a suis totis sublatæ relinquunt partes similes.

149 Partes enim similes duarum magnitudinum sunt directe inter se, ut ipsæ magnitudines, quarum sunt partes (a).

THEOREMA XX.

Si tota ad totam majorem habuerit rationem, quam ablata ad ablatam, etiam reliqua ad reliquam majorem rationem habebit, quam tota ad totam. Si vero ratio totius ad totam minor fuerit ratione ablatæ ad ablatam, reliqua ad reliquam minorem rationem habebit, quam tota ad totam.

I.

150 Magnitudinibus A, B demantur partes a, b; sitque $A.B > a.b$. Dico, esse $A-a.B-b > A.B$. Pappus. l. VII. p. 7.

Demonstratio.

Cum enim sit $A.B > a.b$, erit $Ab > Ba$ (b); ac proinde erit etiam $AB - aB > AB - Ab$ (c). Est autem $AB - aB$ productum extremarum, & $AB - Ab$ productum mediarum. Ergo erit $A-a.B-b > A.B$ (d).

II.

151 Modo sit $A.B < a.b$. Dico, esse $A-a.B-b < A.B$.

De-

(a) §. 17.
(b) §. 98.
(c) Synop. Algeb. §. 269.
(d) §. 100.

Demonstratio.

Namque ob hypothesim erit $Ab < Ba$ (a), adeoque $AB - aB < AB - bA$ (b). Igitur, cum sit $AB - aB$ productum extremarum, & $AB - bA$ productum mediarum, erit $A - a \,.\, B - b < A \,.\, B$ (c). Itaque si tota &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXI.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, differentia antecedentium erit ad differentiam consequentium, ut quavis antecedens ad suam consequentem.

152 Sit $A \,.\, a = B \,.\, b$. Dico, esse $A - B \,.\, a - b = A \,.\, a = B \,.\, b$.

Demonstratio.

Quandoquidem, cum sit $A \,.\, a = B \,.\, b$, erit $Ab = aB$ (d); & ideo $Aa - Ba = Aa - bA$ (e). Est autem $Aa - Ba$ productum extremarum, & $Aa - bA$ productum mediarum. Ergo erit $A - B \,.\, a - b = A \,.\, a$ (f); ac proinde etiam $A - B \,.\, a - b = B \,.\, b$ (g); cum sit per hypothesim $A \,.\, a = B \,.\, b$. Itaque si fuerint &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXII.

Si fuerint tres magnitudines tribus aliis proportionales, differentiae priorum erunt proportionales differentiis posteriorum.

153 Tres magnitudines A, B, C proportionales sint tribus a, b, c, esto nimirum $A \,.\, B :: a \,.\, b$, & $B \,.\, C :: b \,.\, c$. Dico, itidem esse $A - B \,.\, B - C :: a - b \,.\, b - c$.

De-

(a) §. 99.
(b) Synopsis Algeb. §. 269.
(c) §. 101.
(d) §. 82.
(e) Synopsis Algeb. §. 266.
(f) §. 84.
(g) §. 76.

Demonstratio.

Cum enim sit $A . B = a . b$, & $B . C = b . c$; erit quoque $A . a = B . b$, & $B . b = C . c$ (a). Est autem $A - B . a - b = A . a$, ficuti etiam $B - C . b - c = B . b$ (b). Ergo erit $A - B . a - b = B - C . b - c$ (c); & *alternando* erit $A - B . B - C = a - b . b - c$ (d). Itaque si fuerint tres magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si tres inæquales magnitudines per eandem multiplicentur, differentiæ productorum erunt inter se, ut differentiæ ipsarum magnitudinum.

154 Ut si tres inæquales magnitudines a, b, c multiplicatæ fuerint per eandem quantitatem r, & fiant producta ar, br, cr, erit $ar - br . br - cr = a - b . b - c$. Est enim $ar . br = a . b$, & $br . cr = b . c$ (e). Igitur erit quoque $ar - br . br - cr = a - b . b - c$ (f).

COROLLARIUM II.

Si tres inæquales magnitudines per eandem dividantur, quotientium differentiæ erunt inter se, ut differentiæ ipsarum magnitudinum.

155 Divisis nempe tribus inæqualibus magnitudinibus a, b, c per eandem quantitatem d, ita ut sit $\frac{a}{d} = m$, $\frac{b}{d} = n$, $\frac{c}{d} = r$, erit $m - n . n - r = a - b . b - c$. Est enim $m . n$

$= a$

(a) §. 125.
(b) §. 152.
(c) §. 76.
(d) §. 125.
(e) §. 93.
(f) §. 153.

$\because a . b$, quemadmodum etiam $n . r \because b . c$ (a). Quamobrem erit quoque $m - n . n - r \because a - b . b - c$ (b).

THEOREMA XXIII.

Si quatuor magnitudines proportionales per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt proportionalia.

156 Esto $A . a \because B . b$, omnesque termini per eandem quantitatem d multiplicentur, productaque fiant Ad, ad, Bd, bd. Dico, esse $Ad . ad \because Bd . bd$.

Demonstratio.

Cum enim sit $Ad\ ad \because A . a$ (c), & per hypothesim $A . a \because B . b$, erit etiam $Ad . ad \because B . b$ (d). Est autem $Bd . bd \because B . b$ (e). Ergo erit quoque $Ad . ad \because Bd . bd$ (f). Igitur si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo proportionales per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt itidem continuo inter se proportionalia.

157 Videlicet si fuerit $\because a . b . c . d$, erit etiam $\because ax . bx . cx . dx$. Etenim ob hypothesim erit $a . b \because b . c \because c . d$ (g). Ergo erit $ax . bx \because bx . cx \because cx . dx$ (h); ac proinde $\because ax . bx . cx . dx$.

THEO-

(a) §. 94.
(b) §. 153.
(c) §. 93.
(d) §. 78.
(e) §. 93.
(f) §. 76.
(g) §. 47.
(h) §. 156.

THEOREMA XXIV.

Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero tertia, & quarta, producta erunt proportionalia.

158 Esto $A . a :: B . b$. Duæ autem magnitudines A, a multiplicentur per x, & duæ B, b per y. Dico, esse $Ax . ax :: By . by$.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit $Ax . ax :: A . a$ (a), & per hypothesim $A . a :: B . b$, erit quoque $Ax . ax :: B . b$ (b). Est autem $By . by :: B . b$ (c). Ergo erit etiam $Ax . ax :: By . by$ (d). Itaque si prima &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si prima, & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero secunda, & quarta, producta erunt proportionalia.

159 Si nimirum fuerit $A . a :: B . b$, erit etiam $Ax . ay :: Bx . by$. Quandoquidem si ponatur $A . a :: B . b$, erit quoque $A . B :: a . b$ (e); ac proinde $Ax . Bx :: ay . by$ (f). Igitur erit etiam $Ax . ay :: Bx . by$ (g).

THEOREMA XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales per eandem quantitatem dividantur, quotientes erunt geometrice proportionales.

160 Sit $A . a :: B . b$, omnesque termini per eandem quan-

(a) §. 91.
(b) §. 78.
(c) §. 93.
(d) §. 76.
(e) §. 125.
(f) §. 158.
(g) §. 125.

quantitatem d dividantur, sitque $\frac{A}{d} = m$, $\frac{a}{d} = n$, $\frac{B}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$. Dico, esse $m \,.\, n = p \,.\, q$.

Demonstratio.

Cum enim sit $m \,.\, n = A \,.\, a$ (a), & per hypothesim $A \,.\, a = B \,.\, b$, erit etiam $m \,.\, n = B \,.\, b$ (b). Est autem $p \,.\, q = B \,.\, b$ (c). Igitur erit quoque $m \,.\, n = p \,.\, q$ (d). Si quatuor igitur magnitudines &c. quod erit ostendendum.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo inter se proportionales per eandem quantitatem divisæ fuerint, quotientes erunt continuo inter se proportionales.

161 Si nimirum fuerit $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$, & $\frac{a}{x} = m$, $\frac{b}{x} = n$, $\frac{c}{x} = p$, $\frac{d}{x} = q$, erit $\div m \,.\, n \,.\, p \,.\, q$. Etenim ex hypothesi habetur $a \,.\, b = b \,.\, c \,.\, = c \,.\, d$ (e). Igitur erit $m \,.\, n = n \,.\, p = p \,.\, q$ (f); adeoque $\div m \,.\, n \,.\, p \,.\, q$.

THEOREMA XXVI.

Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur, per aliam vero tertia, & quarta, quotientes erunt inter se proportionales.

162 Esto $A \,.\, a = B \,.\, b$, nec non $\frac{A}{x} = m$, $\frac{a}{x} = n$, $\frac{B}{y} = p$, $\frac{b}{y} = q$. Dico, esse $m \,.\, n = p \,.\, q$.

De-

(a) §. 94.
(b) §. 78.
(c) §. 94.
(d) §. 76.
(e) §. 47.
(f) §. 160.

Demonstratio.

Est enim $m : n :: A . a$ (a). Cumque sit per hypothesim $A . a :: B . b$, erit etiam $m . n :: B . b$ (b). Constat autem, esse $p . q :: B . b$ (c). Ergo erit quoque $m . n :: p . q$ (d). Itaque si prima &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si prima, & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur; per aliam vero secunda, & quarta, quotientes erunt proportionales.

163 Si nempe fuerit $A . a :: B . b$. Ponatur autem $\frac{A}{x} = m$, $\frac{B}{x} = n$, $\frac{a}{y} = p$, $\frac{b}{y} = q$, erit $m . p :: n . q$. Etenim cum sit $A . a :: B . b$, erit etiam $A . B :: a . b$ (e); ac proinde $m . n :: p . q$ (f). Quamobrem erit quoque $m . p :: n . q$ (g).

THEOREMA XXVII.

Fractiones eundem denominatorem habentes, sunt directe inter se, ut numeratores, & quae habent eundem numeratorem, sunt inter se, ut denominatores reciproce.

I.

164 Sint duae fractiones ejusdem nominis $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$. Dico, esse $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a . b$.

(a) §. 94.
(b) §. 78.
(c) §. 94.
(d) §. 76.
(e) §. 125.
(f) §. 162.
(g) §. 161.

Demonstratio.

Cum enim sit $\frac{a}{m} . 1 = a . m$, & $\frac{b}{m} . 1 = b . m$ (a), erit quoque $\frac{a}{m} . a = 1 . m$, & $\frac{b}{m} . b = 1 . m$ (b), ac proinde $\frac{a}{m} . a = \frac{b}{m} . b$ (c). Igitur *alternando* habebitur $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} = a . b$ (d).

II.

165 Sint modo duæ fractiones $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{x}$ eundem numeratorem habentes. Dico, eas esse, ut denominatores *reciproce*, videlicet esse $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = x . y$.

Demonstratio.

Reductis fractionibus ipsis ad idem nomen (e), erit $\frac{ax}{yx} = \frac{a}{y}$, $\frac{ay}{xy} = \frac{a}{x}$; atq; adeo $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = \frac{ax}{yx} . \frac{ay}{xy}$ (f). Est autem $\frac{ax}{yx} . \frac{ay}{xy} = ax . ay$ (g). Igitur erit quoque $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = ax . ay$ (h). Manifestum porro est, esse $ax . ay = x . y$ (i). Ergo erit similiter $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = x . y$ (k). Itaque fractiones &c. quod erat ostendendum.

SCHO-

(a) § 32.
(b) §. 125.
(c) §. 76.
(d) § 125.
(e) Synopsis Algeb. § 116.
(f) §. 125.
(g) § 164.
(h) §. 78.
(i) §. 93.
(k) §. 78.

SCHOLION

166 Datis idcirco pluribus fractionibus dissimilibus, ipsisque ad idem nomen revocatis, facile erit dignoscere, quamnam proportionem inter se habeant.

THEOREMA XXVIII.

Si antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam ipsarum consequentes inter se mutuo respective multiplicentur, producta, quae inde fiunt, erunt inter se in ratione composita ex illis omnibus rationibus datis.

167 Raitonum $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ antecedentes termini A, B, D, quemadmodum etiam earundem consequentes a, b, d, multiplicentur *respective* inter se mutuo, & fiant producta ABD, abd. Dico, productum ABD esse ad productum abd in ratione *composita* ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{A}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = r$; ac proinde $am = A$; $bn = B$, $dr = D$ (a), erit $ambndr = ABD$ (b). Est autem $\frac{ambndr}{abd}$ mnr (c). Ergo erit etiam $\frac{ABD}{abd} = mnr$ (d). Quotus autem mnr oritur ex multiplicatione inter se mutuo exponen-

(a) §. 13.
(b) §. 80.
(c) Synopsis Algeb. §. 72.
(d) §. 81.

nentium m, n, r rationum $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$, estque *mnr exponens* rationis $\frac{ABD}{abd}$ (a). Ergo ratio producti ABD ad productum *abd* est composita ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ (b). Itaque si antecedentes &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si fuerint quatuor magnitudines, productum ex ductu primæ in tertiam est ad productum ex ductu secundæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad secundam, & ex ratione tertiæ ad quartam.

168 Positis nempe quatuor magnitudinis A, *a*, B, *b*, productum AB erit ad productum *ab* in ratione composita ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$. Est enim AB productum ex antecedentibus, & *ab* est productum ex consequentibus ipsarum rationum terminis.

COROLLARIUM II.

Si fuerint quatuor magnitudines, productum ex ductu primæ in secundam erit ad productum ex ductu tertiæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad tertiam, & ex ratione secundæ ad quartam.

169 Videlicet positis magnitudinibus A, *a*, B, *b* erit *Aa* ad B*b* in ratione composita ex rationibus $\frac{A}{B}$, $\frac{a}{b}$. Patet ex præcedenti.

SCHO-

(a) §. 8. (b) §. 53.

SCHOLION.

170 Ut igitur determinetur *exponens* rationis ex pluribus rationibus datis compositæ, multiplicandi sunt inter se mutuo ipsarum antecedentes termini ex una, & earundem consequentes ex altera parte. Fractio enim ex hisce productis facta rationem quæsitam determinabit. Ut si definire oporteat rationem compositam ex rationibus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, facta multiplicatione antecedentium 2, 4, 5, sicuti etiam consequentium 3, 7, 9, cum sit $2 \times 4 \times 5 = 40$, & $3 \times 7 \times 9 = 189$, ratio, quæ exprimitur per fractionem $\frac{48}{189}$, erit ratio quæsita.

THEOREMA XXIX.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales seorsim multiplicentur, producta erunt proportionalia.

171 Esto $A . B = D . F$, sicuti etiam $a . b = d . f$. Dico, esse $Aa . Bb = Dd . Ff$.

Demonstratio.

Cum enim sit $A . B = D . F$, si ponatur $\frac{A}{B} = m$, erit etiam $\frac{D}{F} = m$ (a). Eadē ratione, si fuerit $\frac{a}{b} = n$, erit quoq; $\frac{d}{f} = n$. Igitur erit $\frac{Aa}{Bb} = mn$, & $\frac{Dd}{Ff} = mn$ (b); ac proinde $\frac{Ab}{Bb} = \frac{Dd}{Ff}$, sive $Aa . Bb = Dd . Ff$ (c). Itaque si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

CO-

(a) §. 34. (b) §. 167. (c) § 34.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo proportionales per totidem continuo itidem proportionales seorsim multiplicentur, producta erunt continuo inter se proportionalia.

172 Si nimirum fuerit $\div\div$ A. B. D. F, & $\div\div$ $a.b.d.f$, erit similiter $\div\div$ $Aa.\ Bb.\ Dd.\ Ff$. Est enim A . B = B . D = D . F, sicuti etiam $a.\ b = b.\ d = d.\ f$ (a). Igitur erit $Aa.\ Bb = Bb.\ Dd = Dd.\ Ff$ (b), seu $\div\div$ $Aa.\ Bb.\ Dd.\ Ff$ (c).

SCHOLION.

173 Hinc ostenditur artificium multiplicandi fractiones inter se mutuo, quod alibi tradidimus (d), videlicet in eo illud consistere, ut ipsarum numeratores, atque denominatores inter se mutuo *respective* multiplicentur; & ex productis, quae inde fiunt, fractio constituatur. Sit enim fractio $\frac{a}{b}$ multiplicanda per fractionem $\frac{c}{d}$. Quoniam ergo denominator cujusvis fractionis unitatem adaequat (e); omnisque fractio se habet ad unitatem, ut ipsius numerator ad suum denominatorem (f), si ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$, erit $m.\ 1 = a.\ b$, & $n.\ 1 = c.\ d$; ac proinde $mn\ .\ 1 = ac\ .\ bd$ (g), seu $\frac{mn}{1} = \frac{ac}{bd}$ (h). Fractio autem $\frac{mn}{1}$ exprimit valorem producti ex valoribus m, n inter se multiplicatis; cum sit $\frac{mn}{1} = mn$ (i). Ergo fractio quoque $\frac{ac}{bd}$ valorem designabit producti,

(a) §. 47.
(b) §. 171.
(d) §. 48.
(d) Synop. Algeb. §. 121.
(e) Ibidem §. 96.
(f) §. 32.
(g) §. 171.
(h) §. 6.
(i) Synopsis Algeb. §. 69.

ducti,quod fit ex multiplicatione fractionis $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$

THEOREMA XXX.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales seorsim dividantur, quotientes erunt quoque inter se proportionales.

174 Esto $A.B = D.F$, & $a.b = d.f$, sique $\frac{A}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = p$, & $\frac{F}{f} = q$. Dico, esse $m.n = p.q$.

Demonstratio.

Etenim cum ex hypothesi habeatur $am = A$, $bn = B$, $dp = D$, $fq = F$ (a), sicuti est $A.B = D.F$, ita erit $am.bn = dp.fq$; ac propterea $amfq = bndp$ (b). Est autem $af = bd$ (c); cum sit $a.b = d.f$. Ergo erit $\frac{amfq}{af} = \frac{bndp}{bd}$ (d). Constat porro, esse $\frac{amfq}{af} = mq$, sicuti etiam $\frac{bndp}{bd} = np$ (e). Ergo erit $mq = np$ (f), atque adeo $m.n = p.q$ (g). Itaque si quatuor magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo proportionales per totidem continuo seorsim proportionales dividantur, quotientes erunt similiter continuo proportionales.

175 Si nempe fuerit ∺ $A.B.D.F$, & ∺ $a.b.d,f$, nec non $\frac{A}{a}$

$= m$,

(a) §. 11.
(b) §. 82.
(c) §. 82.
(d) §. 81.
(e) Synop. Algeb. §. 72.
(f) §. 81.
(g) §. 84.

$= m, \frac{B}{b} = n, \frac{D}{d} = p, \frac{F}{f} = q$, erit $\div\!\!: m. n. p. q.$ Enimvero cum ſit $A. B = B. D = D. F$, & $a.b = b.d = d.f$ (a); erit quoque $m. n = n. p = p. q$ (b); quod idem eſt ac $\div\!\!: m. n. p$ $q.$ (c).

THEOREMA XXXI.

Si fuerint quotcunque magnitudines in eadem ſerie conſtitutæ, ratio primæ ad ultimam erit compoſita ex omnibus rationibus intermediis.

176 Sint plures magnitudines a, b, c, d, e, f in eadem ſerie conſtitutæ. Dico, primam a eſſe ad ultimam f in ratione compoſita ex omnibus rationibus intermediis $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$.

Demonſtratio.

Productum $\frac{abcde}{bcdef}$ exprimit rationem compoſitam ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$ inter ſe multiplicatis (d). Eſt autem $\frac{a}{f} = \frac{abcde}{bcdef}$ (e). Ergo ratio quoque magnitudinis a ad magnitudinem f eſt compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$. Si fuerint ergo quotcunque &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §. 47.
(b) §. 174.
(c) §. 48.
(d) §. 167.
(e) Synopſis Algeb. §. 71.

COROLLARIUM I.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo inter se proportionales, prima erit ad tertiam in ratione duplicata, ad quartam in ratione triplicata, ad quintam in ratione quadruplicata &c. primæ ad secundam.

177 Ut si fuerit $\div\!\!\!\cdot\; a.\, b.\, c.\, d.\, e.\, f,$ ratio $\frac{a}{c}$ erit *duplicata*, ratio $\frac{a}{d}$ *triplicata*, ratio $\frac{a}{e}$ *quadruplicata* &c. rationis $\frac{a}{b}$. Est enim $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c}$, ratio $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d}$, & ratio $\frac{a}{e} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e}$ (a). Rationes autem $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$ sunt per hypothesim rationi $\frac{a}{b}$ æquales. Ergo magnitudo a erit ad magnitudinem c in ratione *duplicata*, ad magnitudinem d in ratione *triplicata*, ad magnitudinem e in ratione *quadruplicata* ejusdem a ad secundam b (b).

COROLLARIUM II.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo inter se proportionales, prima erit ad secundam in ratione subduplicata primæ ad tertiam, subtriplicata primæ ad quartam, subquadruplicata primæ ad quintam &c. & sic deinceps.

178 Patet ex præcedenti. Si namque ponatur $\div\!\!\!\cdot\; a.\, b.\, c.$

 $d.\, e.\, f,$

(a) §. 176.
(b) §. 55.

d. e. f, manifestum est, ex ratione $\frac{a}{b}$ ducta in seipsam effici rationem $\frac{a}{c}$, ex ratione $\frac{a}{b}$ multiplicata per $\frac{a}{c}$ oriri rationem $\frac{a}{d}$, & ex eadem $\frac{a}{b}$ ducta in rationem $\frac{a}{d}$ consurgere rationem $\frac{a}{e}$ (a). Ergo ratio $\frac{a}{b}$ erit *subduplicata* rationis $\frac{a}{c}$, *subtriplicata* rationis $\frac{a}{d}$, *subquadruplicata* rationis $\frac{a}{e}$, atque ita deinceps (b).

COROLLARIUM III.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ, ordinatam proportionem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

179 Si nimirum ex una parte habeantur magnitudines *A*, *B*, *D*, & ex alia totidem *a*, *b*, *d*, fueritque $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, $\frac{B}{D} = \frac{b}{d}$, erit $\frac{A}{D} = \frac{a}{d}$, sive *A. D.* = *a. d.* Cum enim sit $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, & $\frac{B}{D} = \frac{b}{d}$, erit quoque $\frac{AB}{BD} = \frac{ab}{bd}$ (c). Est autem $\frac{A}{D} = \frac{AB}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ab}{bd}$ (d). Ergo erit etiam $\frac{A}{D} = \frac{a}{d}$ (e).

COROL-

(a) §. 177.
(b) §. 59.
(c) §. 80.
(d) §. 176.
(e) §. 78.

COROLLARIUM IV.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ, quarum prima in una serie habeat majorem rationem ad secundam, secunda ad tertiam &c. quam habeat in altera serie prima ad secundam, secunda ad tertiam &c. prima in priori serie majorem rationem habebit ad ultimam, quam prima in posteriori serie ad ultimam.

180 Ut si ex una parte habeantur magnitudines $\mathcal{A}, B, D$, & ex altera magnitudines a, b, d, sitque $\frac{\mathcal{A}}{B} > \frac{a}{b}, \frac{B}{D} > \frac{b}{d}$, erit quoque $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$, sive $\mathcal{A}.D > a.d$. Stante namque hypothesi, habebitur $\frac{\mathcal{A}B}{BD} > \frac{ab}{bd}$ (a). Est autem $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{\mathcal{A}B}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ab}{bd}$ (b). Ergo erit etiam $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$, seu $\mathcal{A}.D > a.d$ (c)..

COROLLARIUM V.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ, perturbatam proportionem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

181 Videlicet si ex una parte fuerint tres magnitudins $\mathcal{A}$, B, D, & ex alia tres a, b, d, quæ sic se habeant, ut sit $\frac{\mathcal{A}}{B} = \frac{b}{d}$, & $\frac{B}{D} = \frac{a}{b}$, adhuc erit $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{a}{d}$. Etenim ob hypothe-

(a) §. 95.
(b) §. 176.
(c) §. 79.

pothesim erit $\frac{AB}{BD} = \frac{ba}{db}$ (a). Constat autem, esse $\frac{A}{D} = \frac{AB}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ba}{db}$ (b). Ergo erit $\frac{A}{D} = \frac{a}{d}$ (c).

COROLLARIUM VI.

Si prima plurium magnitudinum in una serie majorem habuerit rationem ad secundam, & secunda ad tertiam, quam habeat in altera serie secunda ad tertiam, & prima ad secundam, ratio quoque primæ ad tertiam in priori serie major erit ratione primæ ad tertiam in serie posteriori.

182 Positis nempe tribus magnitudinibus A, B, D ex una parte, totidemque a, b, d ex alia, quæ sic se habeant, ut sit $\frac{A}{B} > \frac{b}{d}$, & $\frac{B}{D} > \frac{a}{b}$, erit quoque $\frac{A}{D} > \frac{a}{d}$. Demonstratur eodem modo, quo ostensum est *corollarium* IV. Etenim eandem ob causam erit $\frac{AB}{BD} > \frac{ba}{db}$, ac proinde $\frac{A}{D} > \frac{a}{d}$; cum sit $\frac{AB}{BD} = \frac{A}{D}$, & $\frac{ba}{db} = \frac{a}{d}$.

SCHOLION.

183 Ex hoc demum theoremate ostenditur methodus alibi tradita (d). reducendi fractionem fractionis ad fractionem primam. Pro intelligentia idcirco notandum est, fractionem fractionis ad fractionem primam reducere idem esse omnino, ac invenire, quot, & quales particulas unitatis fractio ipsa secunda

(a) §. 80.
(b) §. 176.
(c) §. 76.
(d) Synopsis Algeb. §. 131.

cunda adæquet, seu quamnam fractio secunda ad unitatem rationem habeat. Diximus autem, fractionem fractionis ad fractionem primam reduci, si numerator unius per numeratorem alterius, & denominator per denominatorem multiplicentur, & ex productis *respective* nova fractio constituatur; ut si $\frac{a}{b}$ sit fractio fractionis $\frac{c}{d}$, factum $\frac{ac}{bd}$ esse fractionem primam, ad quam fractio $\frac{a}{b}$ revocanda erat. Ostendendum idcirco est, factum $\frac{ac}{bd}$ rationem exprimere fractionis secundæ $\frac{a}{b}$ ad unitatem. Itaque cum denominator b fractionis secundæ $\frac{a}{b}$ adæquet valorem fractionis primæ $\frac{c}{d}$ (a), & numerator a partem, vel partes designet hujus valoris, quas importat fractio ipsa secunda $\frac{a}{b}$ (b), erit fractio secunda $\frac{a}{b}$ ad fractionem primam $\frac{c}{d}$, ut numerator a ad denominatorem b; atque adeo fractio ipsa $\frac{a}{b}$ erit *exponens* rationis, quam habet fractio secunda $\frac{a}{b}$ ad primam $\frac{c}{d}$ (c). Similiter cum fractio prima $\frac{c}{d}$ sit ad unitatem, ut numerator c ad denominatorem d (d), fractio $\frac{c}{d}$ erit *exponens* rationis ipsius fractionis $\frac{c}{d}$ ad unitatem (e). Constat autem, positis tribus quantitatibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, 1, primam $\frac{a}{b}$ esse ad tertiam 1 in ratione

(a) Synop. Algeb. §. 109
(b) Ibidem
(c) §. 7.
(d) §. 12.
(e) §. 7.

tione composita ex ratione primæ $\frac{a}{b}$ ad secundam $\frac{c}{d}$, & ex ratione secundæ $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 (a), atque adeo in ea ratione, cujus *exponens* sit factum ex *exponente* rationis, quam habet prima $\frac{a}{b}$ ad secundam $\frac{c}{d}$, multiplicato per *exponentem rationis*, quam habet secunda $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 (b). Ergo, cum *exponens* rationis primi termini $\frac{a}{b}$ ad secundum $\frac{c}{d}$ sit $\frac{a}{b}$, & *exponens* rationis secundi termini $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 sit $\frac{c}{d}$, ut modo vidimus, *exponens* rationis, quam habet fractio secunda $\frac{a}{b}$ ad unitatem, erit factum $\frac{ac}{bd}$; adeoque &c.

THEOREMA XXXII.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo geometrice proportionales, quadratum primæ erit ad quadratum secundæ, ut prima ad tertiam, cubus primæ ad cubum secundæ, ut prima ad quartam, quadrato quadratum primæ ad quadrato-quadratum secundæ, ut prima ad quintam, & sic deinceps.

184 Esto $\dot{\because}$ $a.\ b\ c.\ d.\ e$. Dico, esse $a^2.\ b^2 = a.\ c$, $a^3.\ b^3 = a.\ d$, $a^4.\ b^4 = a.\ e$.

De-

(a) §. 176.
(b) §. 52.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{a}{b} = m$, atque adeo etiam $\frac{b}{c} = m$, $\frac{c}{d} = m$, $\frac{d}{e} = m$ (a). Igitur erit $\frac{a^2}{b^2} = m^2$, $\frac{a^3}{b^3} = m^3$, $\frac{a^4}{b^4} = m^4$ (b). Manifestum est autem, esse $\frac{a}{c} = m^2$, $\frac{a}{d} = m^3$, $\frac{a}{e} = m^4$ (c). Ergo erit quoque $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$, $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a}{e}$, seu $a^2.b^2 = a.c.$, $a^3.b^3 = a.d$, $a^4.b^4 = a.e$ (d). Itaque si fuerint quotcunque magnitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Magnitudines quadratæ sunt in ratione duplicata, cubicæ in ratione triplicata, quadrato-quadratæ in ratione quadruplicata &c. suarum radicum.

185 Videlicet ratio quadrati a^2 ad quadratum b^2 est *duplicata*, ratio cubi a^3 ad cubum b^3 est *triplicata* &c. rationis radicis a ad radicem b. Ostensum est enim, rationem $\frac{a}{c}$ esse *duplicatam*, rationem $\frac{a}{d}$ *triplicatam* &c. rationis $\frac{a}{b}$ (e).

(a) §. 34.
(b) §. 57.
(c) §. 177.
(d) §. 34.
(e) §. 177.

COROLLARIUM II.

Radices quadratæ sunt in ratione subduplicata, radices cubicæ in ratione subtriplicata, radices quadrato-quadratæ in ratione subquadruplicata &c. suarum potestatum.

186. Demonstravimus enim, rationem $\frac{a}{b}$ esse *subduplicatam* rationis $\frac{a}{b}$, *subtriplicatam* rationis $\frac{a}{d}$, *subquadruplicatam* rationis $\frac{a}{e}$ (a).

COROLLARIUM III.

Potestates ejusdem gradus, quæ æquales sunt inter se, æquales radices habent; & vicissim potestates ejusdem gradus, quæ æquales radices habent, sunt æquales.

187 Si nimirum fuerit $aa = bb$, erit quoque $a = b$; & vicissim, si fuerit $a = b$, erit similiter $aa = bb$. Etenim cum per hypothesim sit $\frac{aa}{bb} = 1$ (b), erit $\frac{a}{b} = \sqrt{1}$ (c). Est autem $\sqrt{1} = 1$ (d). Ergo erit $\frac{a}{b} = 1$; adeoque $a = b$ (e). Similiter si ponatur $\frac{a}{b} = 1$, cum ratio quadrati aa ad quadratum bb sit *duplicata* rationis a ad b (f), *exponens* rationis $\frac{aa}{bb}$ erit quadratum unitatis (g). Quadratum autem unitatis est unitas (h). Ergo erit $\frac{aa}{bb} = 1$; ac proinde $aa = bb$ (i). Eodem modo ratiocinare de aliis potestatibus.

(a) §. 178.
(b) §. 14.
(c) §. 62.
(d) Synopsis Algeb. §. 117.
(e) §. 14.
(f) §. 185.
(g) §. 57.
(h) Synop. Algeb. §. 117.
(i) §. 14.

COROLLARIUM VI.

Potestates ejusdem gradus magnitudinum proportionalium sunt inter se proportionales; & vicissim potestates ejusdem gradus inter se proportionales habent radices itidem proportionales.

188 Ut si fuerit $a . b \sqsubset c . d$, erit quoque $aa . bb \sqsubset cc . dd$; & vicissim si fuerit $aa . bb \sqsubset cc . dd$, erit similiter $a . b \sqsubset c . d$. Quandoquidem cum sit $a . b \sqsubset c . d$, sicuti magnitudines quadratæ aa, bb sunt in ratione *duplicata* radicum a, b (a), erunt quoque in ratione *duplicata* radicum c, d. Sunt autem etiam magnitudines quadratæ cc, dd in ratione *duplicata* radicum c, d. Ergo ratio duarum aa, bb similis est rationi duarum cc, dd (b), estque propterea $aa . bb \sqsubset cc . dd$ (c). Eodem ratiocinio ostendetur, esse $a . b \sqsubset c . d$, si fuerit $aa . bb \sqsubset cc . dd$. Quandoquidem cum radices a, b sint in ratione *subduplicata* magnitudinum quadraticarum aa, bb (d), erunt quoque in ratione *subduplicata* duarum cc, dd. Sunt autem etiam duæ c, d in ratione *subduplicata* duarum cc, dd. Ergo ratio duarum a, b similis est rationi duarum c, d, atque adeo erit $a . b \sqsubset c . d$ (e). Eodem modo ratiocinare de potestatibus altioris gradus.

COROLLARIUM V.

Potestates ejusdem gradus magnitudinum continuo proportionalium sunt continuo inter se proportionales; & vicissim radices potestatum ejusdem gradus continuo proportionalium sunt itidem continuo inter se proportionales.

189 Si nempe fuerit $\div a . b . c$, erit etiam $\div aa . bb . cc$; & vicissim si fuerit $\div aa . bb . cc$, erit quoque $\div a . b . c$. Est enim

(a) §. 185.
(b) §. 70.
(c) §. 41.
(d) §. 186.
(e) §. 43.

enim $\div a . b . c$ idem ac $a . b = b . c$, ficuti etiam $\div aa . bb . cc$, idem ac $aa . bb = bb . cc$ (a); adeoque &c.

APPENDIX

De proportionalitate Arithmetica, & Harmonica.

DEFINITIO I.

190 *Proportionalitas Arithmetica est excessuum, sive differentiarum æqualitas. Quatuor nempe magnitudines dicuntur Arithmetice proportionales, cum excessus primæ supra secundam excessum adæquat tertiæ supra quartam, aut excessus secundæ supra primam est illi æqualis, quo tertiam excedit quarta. Tres quoque magnitudines Arithmetice proportionales vocantur, cum differentia primæ, & secundæ est æqualis differentiæ secundæ, & tertiæ.* Sic quatuor magnitudines a, b, c, d erunt Arithmetice proportionales, si facta hypothesi, ut sit $a - b = m$, & $c - d = n$, vel $b - a = x$, & $d - c = y$, fuerit $m = n$, $x = y$. Similiter tres a, b, c erunt Arithmetice proportionales, si posita $a - b = d$, $b - c = f$, aut $b - a = r$, & $c - b = p$, fuerit $d = f$, $r = p$.

HYPOTHESIS I.

191 Ad indicandã proportionalitatem Arithmeticam quatuor magnitudinum a, b, c, d fcribitur $a - b = c - d$, vel $b - a = d - c$. Alii tamen utuntur figno $:::$, fcribuntque $a . b ::: c . d$.

DEFINITIO II.

192 Proportionalitas Arithmetica vel *continua* est, vel *discreta*. *Proportionalitas Arithmetica continua est, cum differentia se-*

(a) §. 48.

secundæ, & tertiæ magnitudinis eadem est cum differentia primæ, & secundæ, ac proinde etiam tertiæ, & quartæ. Discreta vero tunc habetur, cum differentia secundæ, & tertiæ eadem non est cum differentia primæ, & secundæ, atque adeo etiam tertiæ, & quartæ. Ut si fuerit $a - b \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} b - c \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - d$, vel $b - a \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - b \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} d - c$, quatuor magnitudines a, b, c, d erunt *continuo* Arithmetice proportionales. At vero *discrete* tantum proportionales, si fuerit dumtaxat $a - b \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - d$, vel $b - a \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} d - c$.

DEFINITIO III.

193 Quatuor magnitudinum continuo Arithmetice proportionalium secunda, & tertia dicuntur *duæ mediæ continuo proportionales*. Trium quoque magnitudinum continuo Arithmetice proportionalium secunda *media proportionalis* nuncupatur.

HYPOTHESIS II.

194 Proportionalitas continua Arithmetica indicatur, præfigendo signum $\div$ ipsis terminis proportionalibus: ad exprimendam scilicet proportionalitatem continuam Arithmeticam magnitudinum a, b, c, d, scribitur $\div\; a.b.c.d.$

THEOREMA I.

Si fuerint quatuor magnitudines Arithmetice proportionales, summa extremarum erit æqualis summæ mediarum.

195 Esto $a - b \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - d$. Dico, esse $a + d \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} b + c$.

Demonstratio.

Cum enim sit per hypothesim $a - b \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - d$, si utrique membro æquationis eadem magnitudo d adiiciatur, erit $a - b + d \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c - d + d$ (a). Est autem $c - d + d \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c$, cum sit $- d + d \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} o$. Ergo erit $a - b + d \mathrel{\sqsubset\!\!\sqsupset} c$; atque adeo $a - b + d$ +

(a) Synopsis Algeb. § 265.

$+b = c+b$(a), five $a+d = c+b$. Itaque fi fuerint &c. quod erat oftendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines continuo Arithmetice proportionales, fumma extremarum erit dupla media.

196 Videlicet fi fuerit $\div\!\!\div a, b. c$, erit $a+c=2b$. Eft enim $\div\!\!\div a. b. c$ perinde ac $a-b=b-c$.

THEOREMA II.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus fumma extremarum fit æqualis fummæ mediarum, illæ erunt Arithmetice proportionales.

197 Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus fumma $a+d$ extremarum fit æqualis fummæ $b+c$ mediarum. Dico, effe $a-b=c-d$.

Demonftratio.

Quandoquidem, cum fit per hypothefim $a+d=b+c$, erit quoque $a+d-b=b+c-b$, five $a+d-b=c$ (b). Quamobrem, fi utrique membro hujus æquationis fubducatur eadem quantitas d, erit $a+d-b-d$, five $a-b=c-d$(c). Si fuerint ergo quatuor magnitudines &c. quod erat oftendendum.

CO-

(a) Synopfis Algeb. §. 265.
(b) Ibidem §. 266.
(c) Ibidem

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines, ex quibus summa extremarum sit æqualis duplo mediæ, illæ erunt continuo Arithmetice proportionales.

198 Si nimirum fuerit $a+c = 2b$, erit $\div$ $a.\ b.\ c$. Hac enim facta hypothesi, habetur $a-b = b-c$ (a), sive $\div$ $a.\ b.\ c$.

PROBLEMA I.

Datis duabus magnitudinibus, mediam Arithmetice proportionalem invenire.

199 Inter duas a, d mediam Arithmetice proportionalem invenire oporteat.

Resolutio.

Summa $a+d$ bifariam dividatur. Erit $\frac{a+d}{2}$ media quæsita.

Demonstratio.

Facta namque hypothesi, ut sit $\frac{a+d}{2} = b$, erit $2b = a+d$ (b), ac proinde $\div$ $a.\ b.\ d$ (c).

PROBLEMA II.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam Arithmetice proportionalem invenire.

200 Datis a, b, invenire oporteat tertiam Arithmetice proportionalem. Re-

(a) §. 197. (b) §. 22. (c) §. 198.

Resolutio.

Duplo secundæ magnitudinis b, nempe $2b$, subducatur prima a. Residuum $2b - a$ erit tertia proportionalis quæsita.

Demonstratio.

Quandoquidem si ponatur $2b - a = d$, erit $a + d = 2b$ (a); atque adeo $\div a . b . d$ (b).

PROBLEMA III.

Datis tribus magnitudinibus, quartam Arithmetice proportionalem invenire.

201 Datis tribus magnitudinibus a, b, c, quartam Arithmetice proportionalem invenire.

Resolutio.

Fiat summa $b + c$ ex secunda b, & tertia c, eique subducatur prima a. Residuum $b + c - a$ erit quarta proportionalis quæsita.

Demonstratio.

Si namque ponatur $b + c - a = d$, erit $a + d = b + c$ (c). Igitur erit etiam $a - b = c - d$ (d).

DEFINITIO IV.

202 *Tres magnitudines dicuntur harmonice proportionales, cum differentia primæ, & secundæ eam habet proportionem ad differentiam secundæ, & tertiæ, quam habet prima ad tertiam, Quatuor similiter magnitudines harmonice proportionales vocantur*

(a) Synop. Algeb. §. 21
(b) §. 198.
(c) Synopsis Algeb. §. 23.
(d) §. 197.

tur, cum differentia primæ & secundæ est ad differentiam tertiæ & quartæ, ut prima ad quartam. Sic *harmonice* proportionales erunt tres magnitudines a, b, c, si fuerit $a - b \,.\, b - c = a \,.\, c$, vel $b - a \,.\, c - b = a \,.\, c$. Quatuor itidem magnitudines a, b, c, d erunt *harmonice* proportionales, si fuerit $a - b \,.\, c - d = a \,.\, d$, vel $b - a \,.\, d - c = a \,.\, d$.

DEFINITIO V.

203 *Tres magnitudines dicuntur contraharmonice proportionales, si differentia primæ & secundæ fuerit ad differentiam secundæ & tertiæ, ut tertia ad primam. Quatuor itidem magnitudines sunt contraharmonice proportionales, cum differentia primæ & secundæ eam habet rationem ad differentiam tertiæ & quartæ, quam habet illarum quarta ad primam.* Nimirum *contraharmonice* proportionales erunt tres magnitudines a, b, c, si fuerit $a - b \,.\, b - c = c \,.\, a$, vel $b - a \,.\, c - b = c \,.\, a$. Quatuor quoque a, b, c, d erunt *contraharmonice* proportionales, si fuerit $a - b \,.\, c - d = d \,.\, a$, aut $b - a \,.\, d - c = d \,.\, a$.

THEOREMA III.

Si prima trium magnitudinum Arithmetice proportionalium multiplicetur seorsim per secundam & tertiam, & secunda in tertiam ducatur, tria hujusmodi producta erunt harmonice proportionalia.

204 Esto $\div\, a \,.\, b \,.\, c$. Ducta autem a primo in b, deinde in c, fiant producta ab, ac. Multiplicata quoque secunda b per tertiam c, fiat productum bc. Dico, esse $ab - ac \,.\, ac - bc = ab \,.\, bc$.

Demonstratio.

Cum enim sit $\div\, a \,.\, b \,.\, c$, erit $a + c = 2b$ (a); atque adeo si utrumque membrum hujus æquationis multiplicetur per

E e ean-

(a) §. 196.

eandem quantitatem abc, erit $aabc + cabc = 2babc$ (a); ac proinde $aabc - babc = babc - cabc$ (b). Est autem $babc - cabc$, sive $abbc - acbc$ productum extremarum $ab - ac$, bc, & $aabc - babc$, sive $acab - bcab$ productum mediarum $ac - bc$, ab (c). Ergo erit $ab - ac . ac - bc = ab . bc$ (d). Itaque si prima trium magnitudinum &c. quod erat ostendendum.

PROBLEMA IV.

Datis duabus magnitudinibus, mediam harmonice proportionalem invenire.

205 Inter duas magnitudines a, b mediam harmonice proportionalem invenire oporteat.

Resolutio.

Multiplicatis inter se mutuo magnitudinibus datis a, b, duplum facti ab, scilicet $2ab$, dividatur per illarum summam $a+b$. Quotus $\frac{2ab}{a+b}$ erit media harmonice proportionalis inter ipsas a, b.

Demonstratio.

Media harmonice proportionalis inter duas a, b ponatur x. Igitur erit $x - a . b - x = a . b$ (e), ac proinde $\overline{x-a} \times b = \overline{b-x} \times a$, sive $xb - ab = ba - xa$ (f), atque adeo $xb + xa = 2ab$ (g). Constat autem, esse $\frac{xb+xa}{a+b} = x$ (h). Ergo erit quoque $\frac{2ab}{a+b} = x$ (i); adeoque &c.

PRO-

(a) §. 80.
(b) §. 198.
(c) Synopes. Algeb. §. 60.
(d) §. 84.
(e) §. 202.
(f) §. 82.
(g) §. 196
(h) Synop. Algeb. §. 72.
(i) §. 81.

PROBLEMA V.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam harmonice proportionalem invenire.

206 Sint duæ magnitudines a, b. Invenire oporteat tertiam harmonice proportionalem.

Resolutio.

Factum ab ex ductu magnitudinis a in magnitudinem b dividatur per $2a - b$, per duplum scilicet primæ a imminutum secunda b. Quotus $\frac{ab}{2a-b}$ erit tertia harmonice proportionalis quæsita.

Demonstratio.

Magnitudo x sit tertia harmonice proportionalis, esto nimirum $b - a \,.\, x - b = a \,.\, x$. Igitur erit $bx - ax = ax - ba$ (a), adeoque $bx + ba = 2ax$ (b), nec non $2ax - bx = ba$ (c). Manifestum est autem, esse $\frac{2ax - bx}{2a - b} = x$ (d). Ergo erit quoque $\frac{ab}{2a - b} = x$ (e); ac proinde &c.

PROBLEMA VI.

Datis tribus magnitudinibus, quartam harmonice proportionalem invenire.

207 Sint tres magnitudines a, b, c. Invenire oporteat quartam harmonice proportionalem.

(a) §. 82.
(b) §. 196.
(c) Synopsis Algeb. §. 296.
(d) Ibidem §. 72.
(e) § 82

Resolutio.

Factum ac ex ductu primæ a in tertiam c dividatur per $2a-b$, videlicet per duplum primæ a imminutum secunda b. Quotus $\frac{ac}{2a-b}$ erit quarta harmonice proportionalis quæsita.

Demonstratio.

Quantitas x ponatur quarta harmonice proportionalis; esto nimirum $b-a.\ x-c = a.\ x$. Igitur erit $bx-ax = ax-ac$ (a), & hinc $bx+ac = 2ax$ (b), nec non $2ax-bx = ac$ (c). Perspicuum porro est, esse $\frac{2ax-bx}{2a-b} = x$ (d). Ergo erit quoque $\frac{ac}{2a-b} = x$ (e); ac proinde &c.

ELE-

(a) §. 82.
(b) §. 196.
(c) Synop. Algeb. §. 266.
(d) Ibidem §. 72.
(e) §. 81.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER II.

De progressionibus Arithmetica, & Geometrica tam finita, quam infinita.

DE *progressionibus* eximia prorsus, & singularia tradidit summus Geometra P. Gregorius a S. Vincentio, ut, Tacqueto teste, nonnisi spicas ex sua messe ceteris colligendas reliquerit. Nos pauca dumtaxat, præcipua tamen, quæ ad illarum theoriam, & praxim spectant, hoc in libro trademus & explicabimus.

DEFINITIO I.

1 *Progressio in genere est series plurium magnitudinum secundum eandem proportionem continuo crescentium, vel decrescentium.* Si termini continuo augeantur, progressio dicitur *ascendens*, *descendens* vero, si continuo decrescant. Utraque similiter vel *finita* est, vel *infinita*, prout nimirum earum termini numero finiti sunt, vel infiniti.

DEFINITIO II.

2 Duo quicunque termini a, b progressionis $a . b . c . d$ $e . f . g . h$ æqualiter hinc inde distare dicuntur a duobus intermediis d, e, cum tot sunt termini inter primum a, & secundum d, quot inter tertium e, & quartum h. Duo similiter a, g in progressione $a. b. c. d. e. f. g$ dicuntur hinc inde æqualiter distare a medio d, si tot numerentur termini a primo a ad medium d, quot ab eodem medio d ad tertium g.

SYM-

SYMPTOMATA

Progressionis Arithmeticæ.

DEFINITIO III.

3 *Progressio Arithmetica est series magnitudinum continuo Arithmetice proportionalium.* Hujusmodi est series magnitudinum $a. \ a+m. \ a+2m. \ a+3m. \ a+4m. \ a+5m$ &c., quemadmodum etiam series magnitudinum $a. \ a-m. \ a-2m. \ a-3m. \ a-4m. \ a-5m$. Altera enim progressionem Arithmeticam *ascendentem;* altera progressionem Arithmeticam *descendentem* exhibet.

COROLLARIUM. I.

4 *Quilibet terminus progressionis Arithmeticæ ascendentis continet primum, seu minimum, & insuper toties communem excessum, quot a primo* inclusive *ad ipsum* exclusive *termini numerantur.* Sic terminus $a+4m$ progressionis $a. a+m. a+2m. a+3m. \ a+4m. \ a+5m$, præter primum a, quater complectitur communem excessum m, sicuti quatuor sunt termini a minimo a *inclusive* ad ipsum $a+4m$ *exclusive*.

COROLLARIUM II.

5 Hinc *maximus terminus progressionis Arithmeticæ finitæ ascendentis toties continet communem excessum, præter terminum minimum, quot in ipsa progressione sunt termini, uno demto.*

COROLLARIUM III.

6 *Differentia duorum quorumcunque terminorum in progressione Arithmetica toties continet communem excessum, quot termini ab illorum uno* inclusive *ad alterum* exclusive *numerantur.* Sic differentia $3m$ termini $a+5m$ supra terminum $a+2m$ in progressione $a. \ a+m. \ a+2m. \ a+3m. \ a+4m. \ a+5m. \ a+6m.$

$a+6m$ ter complectitur excessum m, sicuti tres sunt termini ab uno $a+2m$ *inclusive* ad $a+5m$ *exclusive*.

THEOREMA I.

In progressione Arithmetica quatuor quicunque termini, quorum duo extremi æqualiter distent a mediis, sunt Arithmetice proportionales.

7 In progressione Arithmetica $a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m.\ a+4m.\ a+5m.\ a+6m.\ a+7m.\ a+8m.\ a+9m$ quatuor spectentur termini $a+m$, $a+4m$, $a+6m$, $a+9m$, quorum duo extremi $a+m$, $a+9m$ æqualiter distent a mediis $a+4m$, $a+6m$. Dico, eos esse Arithmetice proportionales.

Demonstratio.

Est enim ob hypothesim $a+4m-a+m = a+9m-a+6m = 3m$ (a). Ergo erit $a+m.\ a+4m \;\vdots\!:\; a+6m.\ a+9m$ (b). In omni igitur progressione &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In omni progressione Arithmetica summa duorum quorumlibet terminorum adæquat summam aliorum duorum æqualiter hinc inde ab illis distantium.

8 In progressione Arithmetica $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g$ erit $a+g = b+f = c+e$. Cum enim sit $a.\ b \;:::\; f.\ g$ erit $a+g = b+f$. Similiter ex eo quod habeatur $a.\ c \;:::\; e.\ g$, erit $a+g = c+e$. Demum cum sit $b.\ c \;:::\; e.\ f$, erit quoque $b+f = c+e$ (c). Ergo erit $a+g = b+f = c+e$ (d).

THEO-

(a) § 2.
(b) Lib. I. §. 190.
(c) §. 195.
(d) Synop. Algeb. §. 260. 261.

THEOREMA II.

Tres quicunque termini in progressione Arithmetica, quorum duo extremi æqualiter distent a medio, sunt continuo Arithmetice proportionales.

9 In progressione Arithmetica $a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m.\ a+4m.\ a+5m.\ a+6m.\ a+7m$ tres termini spectetur $a+m$, $a+4m$, $a+7m$, quorum duo extremi $a+m$, $a+7m$ æqualiter distent a medio $a+4m$. Dico, eos esse continuo Arithmetice proportionales.

Demonstratio.

Ea enim in hypothesi habetur $a+7m-a+4m = a+4m-a+m = 3m$ (a). Igitur erit $\div\ a+m.\ a+4m.\ a+7m$ (b). Ergo tres quicunque &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In omni progressione Arithmetica summa duorum quorumlibet terminorum est dupla illius, a quo duo ipsi termini æqualiter hinc inde distant.

10 Sic in progressione Arithmetica $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g$ erit $a+g = 2d$. Quandoquidem habetur per hypothesim $\div\ a.\ d.\ g$ (c). Ergo erit $a+g = 2d$ (d).

THEOREMA III.

Summa progressionis Arithmeticæ adæquat productum, quod fit multiplicando summam ex maximo, & minimo termino per dimidium numeri terminorum totius progressionis.

11 Duo casus pro demonstratione hujus theorematis di-

(a) §. 6.
(b) Lib. I. §. 190.
(c) §. 9.
(d) Lib. I. §. 196.

distinguendi sunt, alter scilicet, in quo numerus terminorum totius progressionis sit par, alter, in quo sit impar.

Casus I.

Esto progressio Arithmetica $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$, cujus sex sint termini. Dico, $\overline{a+f}\times 3$, seu $3a+3f$, factum ex multiplicatione summæ $a+f$ extremorum per 3, dimidium scilicet numeri 6 terminorum totius progressionis, æquare ipsius summam $a+b+c+d+e+f$.

Demonstratio.

Cum enim sit $a+f=b+e=c+d$ (a), erit $3a+3f=a+f+b+e+c+d$ (b). Hoc autem aggregatum est summa totius progressionis, ut est evidens. Ergo $3a+3f$ est summa totius progressionis.

Casus II.

Modo numerus terminorum datæ progressionis sit impar, esto nempe progressio $a.b.c.d.e.f.g$. Dico, summā totius progressionis æquare factum ex summa $a+g$ extremorum multiplicata per $3\frac{1}{2}$, scilicet per dimidium numeri terminorum.

Demonstratio.

Cum enim sit $a+g=b+f=c+e$ (c), erit $3a+3g=a+g+b+f+c+e$, ac proinde $3a+3g+d=a+g+b+f+c+e+d$ (d). Est autem $\frac{a+g}{2}=d$ (e). Ergo erit $3a+3g+\frac{a+g}{2}=a+g+b+f+c+e+d$ (f). Constat autem, magnitudinem

(a) §. 8.
(b) Synopsis Algeb. §. 259.
(c) §. 8.
(d) Synopsis Algeb. §. 265.
(e) §. 10.
(f) Synop. Algeb. §. 265.

$a+g+b+f+c+e+d$ esse summam totius progressionis. Ergo etiam $3a+3g+\frac{a+g}{2}$ summam totius datæ progressionis æquabit (a). Manifestum porro est, esse $3a+3g+\frac{a+g}{2} = \overline{a+g}\times 3\frac{1}{2}$. Ergo $\overline{a+g}\times 3\frac{1}{2}$ æquabit summam datę progressionis. Summa igitur progressionis &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si summa ex maximo, & minimo termino Arithmeticæ progressionis ducatur in numerum terminorum, productum, quod hinc efficitur, est duplum summæ totius progressionis.

12 Ut si maximus terminus datæ progressionis fuerit a, minimus p, & numerus terminorum x, erit $\overline{a+p}\times x$, sive $ax+px$ duplum summæ totius progressionis.

COROLLARIUM II.

Si summa ex maximo, & minimo termino Arithmeticæ progressionis ducatur in numerum terminorum, & productum per binarium dividatur, quotus erit totius progressionis summa.

13 Erit nempe $\frac{ax+px}{2}$ summa progressionis, cujus maximus terminus sit a, minimus p, & numerus terminorum x. Patet ex præcedenti.

(a) Synopsis Algebr. §. 261.

COROLLARIUM III.

Summa progreſſionis Arithmeticæ adæquat productum, quod fit multiplicando numerum terminorum totius progreſſionis per ſemiſſem ſummæ extremorum.

14 Videlicet iiſdem poſitis, erit $x \times \frac{a+p}{2}$ ſumma totius progreſſionis. Eſt enim idem productum, quod efficitur, ſive x per $\frac{a+p}{2}$, ſive $a+p$ per $\frac{x}{2}$ multiplicetur.

COROLLARIUM IV.

Si numerus terminorum Arithmeticæ progreſſionis fuerit impar, productum ex ductu medii termini in numerum terminorum æquale erit ſummæ totius progreſſionis.

15 Nimirum ſi impar fuerit numerus x datæ progreſsionis, cujus maximus terminus ſit a, minimus p, & medius d, erit dx ſumma totius progreſsionis. Cum enim tunc ſit $\frac{a+p}{2} = d$ (a), erit quoque $\frac{a+p}{2} \times x = d \times x$ (b). Factum autem $\frac{ax+px}{2}$ adæquat ſummam totius progreſsionis (c). Ergo eam quoque æquabit factum dx (d).

PROBLEMA I.

Ultimo terminorum, & exceſſu datis, progreſſionem Arithmeticam continuare.

16 Poſtremus terminus datæ progreſsionis ſit d, & communis exceſſus m. Progreſsionem ipſam continuare oporteat.

 Re-

(a) §. 10
(b) Lib. I. §. 10.
(c) §. 11.
(d) Synopſis Algeb. §. 261.

Resolutio.

Si progresio sit *ascendens*, communis excessus m adiiciatur postremo termino d, & fiat $d+m$, cui iterum adiiciatur excessus ipse, & sic deinceps. Si vero progressio fuerit *descendens*, excessus m subducatur termino postremo d, tum ex residuo $d-m$ idem excessus auferatur, atque ita deinceps. Habebitur in primo casu progressio *ascendens*....... $d+m$. $d+2m$. $d+3m$ &c. In secundo vero progressio *descendens*....... $d-m$. $d-2m$. $d-3m$ &c.

Demonstratio.

Manifesta est ex ipsa natura progresionis Arithmeticæ tam *ascendentis*, quam *descendentis*.

COROLLARIUM.

Si primus terminus progressionis Arithmeticæ descendentis fuerit magnitudo finita, progressio ipsa continuari nequit in infinitum per terminos positivos.

17 Communis namque excessus, qui continuo subtrahitur, aliquoties sumtus summam tandem constituit primo termino æqualem.

PROBLEMA II.

Datis numero terminorum, excessu, & minimo termino progressionis, maximum ejusdem terminum invenire.

18 Numerus terminorum datæ progresionis Arithmeticæ sit x, communis excessus m, & minimus terminus p. Invenire oporteat terminum maximum.

Re-

Resolutio.

Numerus terminorum unitate mulctatus, scilicet $x-1$, multiplicetur per communem excessum m, & producto $mx-m$ adiiciatur minimus terminus p. Erit $mx-m+p$ maximus terminus quæsitus.

Demonstratio.

Patet ex §. 5.

PROBLEMA III.

Datis maximo termino progressionis, numero terminorum, & communi excessu, invenire terminum minimum.

19 Maximus terminus datæ progressionis Arithmeticę sit a, numerus terminorum x, & communis excessus m. Invenire terminum ejusdem minimum.

Resolutio.

Numerus terminorum unitate mulctatus, scilicet $x-1$, multiplicetur per communem excessum m, & productum $xm-m$ subducatur maximo termino a: Erit $a-xm+m$ minimus terminus quæsitus.

Demonstratio.

Cum enim maximus Arithmeticæ progressionis terminus toties, præter terminum ejusdem minimum, communem excessum complectatur, quot in ipsa progressione numerantur termini, demto uno (a), si communis excessus multiplicetur per numerum terminorum unitate mulctatum, fiet productum, quod a maximo termino deficiet valore termini minimi. Ergo &c. PRO-

(a) §. 5.

PROBLEMA IV.

Datis numero terminorum, maximo & minimo termino, communem excessum invenire.

20 Numerus terminorum datæ progresſionis ſit x, maximus terminus a & minimus p. Invenire communem exceſſum.

Reſolutio.

Minimus terminus p auferatur a maximo a, & reſiduum $a-p$ dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, ſcilicet per $x-1$. Erit $\frac{a-p}{x-1}$ exceſſus quæſitus.

Demonſtratio.

Sicuti namque, ſi numerus terminorum unitate mulctatus multiplicetur per communem exceſſum, fit maximus terminus minimo imminutus (a), ita viciſsim, ſi maximus progreſſionis terminus minimo imminutus dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, conſectarium eſt, ut *quotus* ſit communis exceſſus (b). Igitur &c.

PROBLEMA V.

Datis maximo & minimo termino progreſſionis Arithmeticæ, ſimulque numero terminorum, illius ſummam invenire.

21 Maximus terminus datæ progreſsionis ſit a, minimus p, & numerus terminorum x. Totius progreſsionis ſummam invenire.

Re-

(a) §. 19.
(b) Synopſis Algeb. §. 67.

Resolutio I.

Summa extremorum $a+p$ multiplicetur per $\frac{x}{2}$ dimidium numeri terminorum. Factum $\frac{ax+px}{2}$ erit summa quæsita.

Demonstratio.

Patet ex §. 11.

Resolutio II.

Summa extremorum $a+p$ multiplicetur per x integrum numerum terminorum, & productum $ax+px$ per *binarium* dividatur. Erit $\frac{ax+px}{2}$ summa totius progressionis.

Demonstratio.

Patet ex §. 13.

Resolutio III.

Numerus x terminorum multiplicetur per $\frac{a+p}{2}$ semissem summæ extremorum. Factum erit summa quæsita.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 14.

PRO:

PROBLEMA VI.

Datis numero terminorum, summa progressionis, & communi excessu, invenire maximum & minimum terminum.

22 Numerus terminorum sit x, summa progresionis y, & communis excessus m. Maximum & minimum terminum ipsius progresionis invenire.

Resolutio.

Summa progresionis y dividatur per numerum terminorum x, sitque $\frac{y}{x}=p$. Numerus terminorum x unitate mulctatus; scilicet $x-1$, multiplicetur per communem excessum m, & factum $xm-m$ auferatur a *quoto* p, duplato, nempe a $2p$. Residuo $2p-xm+m$ bifariam diviso, erit $\frac{2p-xm+m}{2}$ terminus minimus; maximus $xm-m+\frac{2p-xm+m}{2}$, qui fuerant quęsiti.

Demonstratio.

Cum enim summa progressionis oriatur ex numero terminorum ducto in semissem summæ ex extremis (a), si summa progressionis per numerum terminorum dividatur, *quotus* erit semissis summæ extremorum (b). Facta igitur hypothesi, ut sit $\frac{x}{y}=p$, erit p semissis summæ extremorum, atque adeo $2p$ eorundem summa. Rursus quoniam numerus terminorum unitate mulctatus, si per communem excessum

(a) §. 14.

(b) Synop. Algeb. §. 67.

ſum multiplicetur, dat terminum maximum ipſius progreſſionis minimo imminutum (a), erit $xm-m$ maximus terminus progreſſionis imminutus minimo. Quamobrem ſi ſummæ $2p$ extremorum ſubducatur $xm-m$, erit $2p-xm+m$ duplum minimi; quatenus nempe ſummæ $2p$ ex maximo, & minimo ſubtrahitur valor $xm-m$, qui a maximo termino deficit valore termini minimi. Diviſo ergo $2p-xm+m$ per 2, *quotus* $\frac{2p-xm+m}{2}$ erit minimus terminus progreſſionis quæſitus. At vero terminus ejuſdem maximus $xm-m+\frac{2p-xm+m}{2}$.

SYMPTOMATA
Progreſſionis Geometricæ finitæ.

DEFINITIO IV.

23 *Progreſſio Geometrica tam aſcendens, quam deſcendens eſt ſeries magnitudinum continuo inter ſe Geometrice proportionalium.* Ut ſi fuerit $a.\ b = b.\ c = c.\ d = d.\ e$, ſeries magnitudinum $a.\ b.\ c.\ d.\ e$ erit progreſſio Geometrica finita, *aſcendens* quidem ſi termini continuo augeantur; *deſcendens* vero, ſi continuo decreſcant.

DEFINITIO V.

24 *Denominator progreſſionis Geometricæ eſt exponens rationis, ſecundum quam termini ſeſe conſequuntur.* Ut ſi in progreſſione $a.\ b\ c.\ d.\ e$ fuerit $\frac{a}{b} = m$, quantitas m erit denominator ipſius progreſſionis $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$

(a) §. 11.

THEOREMA IV.

Quatuor quicunque termini progressionis Geometricæ, quorum extremi æqualiter distent a mediis, sunt Geometrice proportionales.

25 In progressione Geometrica $a.b.c.d.e.f.g.h$ quatuor spectentur termini a, d, e, h, quorum duo extremi a, h æqualiter distent a mediis d, e. Dico, esse $a.\,d = e.\,h$.

Demonstratio.

Denominator progressionis sit m, atque adeo $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = m$, sicuti etiam $\frac{e}{f} = \frac{f}{g} = \frac{g}{h} = m$ (a). Erit ergo $\frac{a}{d} = \frac{e}{h} = m^3$ (b), ac propterea $a.\,d = e.\,h$ (c). Igitur quatuor &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In omni progressione Geometrica productum duorum terminorum extremorum adæquat productum duorum quorumlibet mediorum, a quibus extremi æqualiter hinc inde distent.

26 In progressione nimirum Geometrica $a.\,b.\,c.\,d.\,e.f.\,g$ erit $ag = ce$. Enimvero cum sit $a.\,c = e.\,g$ (d), erit quoque $ag = ce$ (e).

THEO-

(a) §. 24.
(b) Lib. I. §. 177., & §. 57.
(c) Ibidem §. 34.
(d) §. 25.
(e) Lib. I. §. 195.

THEOREMA V.

In omni progressione Geometrica tres quicunque termini, quorum duo extremi æqualiter distent a medio, sunt continuo proportionales.

27 In progressione Geometrica *a. b. c. d. e. f. g* tres sumantur termini *a, d, g*, quorum duo extremi *a, g* æqualiter distent a medio *d*. Dico, esse $\div\!\!\div$ *a. d. g*.

Demonstratio.

Coincidit cum demonstratione theorematis præcedentis. Etenim si denominator progressionis sit *m*, erit $\frac{a}{d} = \frac{d}{g} = m$ (a), ac proinde *a. d* = *d. g*, sive $\div\!\!\div$ *a. d. g* (b). Itaque in omni &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In omni progressione Geometrica productum duorum quorumlibet terminorum æqualiter hinc inde a medio distantium est æquale quadrato medii.

28 Videlicet in progressione *a. b. c. d. e. f. g* erit *ag* = *dd*. Id enim ex eo sequitur, quod sit $\div\!\!\div$ *a. d. g* (c).

THEOREMA VI.

In omni progressione Geometrica ascendente, quæ ab unitate incipiat, tertius terminus ab unitate est quadratus, & ceteri omnes unum intermittentes: quartus ab unitate est cubus, & ceteri omnes duos intermittentes.

29 Esto progressio Geometrica *ascendens*, quæ ab unitate inci-

(a) Lib. I. §. 177., & §. 57. (b) Ibidem §. 34. (c) Ibidem §. 83.

incipiat, videlicet $1. a. b. c. d. e. f. g. h. m.$ Dico; tertium b esse quadratum, sicuti etiam ceteros omnes unum intermittentes, puta d, f, h. Quartum vero c esse cubum, quemadmodum etiam $f, m,$ quos inter duo termini reperiuntur.

Demonstratio.

Cum enim sit $1. a = a. b,$ erit etiam $a. 1 = b. a$ (a). Est autem $\frac{a}{1} = a$ (b). Ergo erit quoque $\frac{b}{a} = a$ (c), atque adeo $aa = b$ (d). Similiter cum sit $a. b = b. c,$ habebitur quoque $b. a = c. b$ (e); cumque sit $\frac{b}{a} = a,$ erit etiam $\frac{c}{b} = a$ (f), & ideo $ab,$ sive $aaa = c$ (g). Eadem ratione demonstrabitur, esse $d = a^4$, $e = a^5$, $f = a^6$, $g = a^7$, $h = a^8$, $m = a^9$; ut proinde progressioni $1. a. b. c. d. e. f. g. h. m$ hæc alia substitui possit $1. a. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9.$ Manifestum est autem, terminos a^2, a^4, a^6, a^8 esse quadratos; cum ex terminis a, a^2, a^3, a^4 in se ductis consurgant; terminos vero a^3, a^6, a^9 esse cubos; cum fiant ex quadratis a^2, a^4, a^6 multiplicatis per suas radices a, a^2, a^3. Ergo termini quoque b, d, f, h sunt quadrati; cubici vero termini $c, f, m,$ ac proinde in omni progressione &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VII.

In progressione Geometrica finita ut differentia maximi termini supra proxime minorem ad ipsum terminum proxime minorem maximo, ita excessus maximi supra minimum ad omnes simul reliquos terminos collective sumtos.

30 Esto progressio Geometrica descendens $a. b. c. d. e.$ Dico,

(a) Lib. I. §. 123.
(b) Ibidem §. 10.
(c) Ibidem §. 34.
(d) Ibidem §. 11.
(e) Ibidem §. 121.
(f) Ibidem §. 34.
(g) Ibidem §. 11.

co, $a-e$, differentiam maximi termini a supra minimum e, esse ad summam reliquorum $b+c+d+e$, ut est $a-b$, excessus maximi a supra proxime minorem b, ad ipsum b, videlicet esse $a-e \,.\, b+c+d+e = a-b \,.\, b$.

Demonstratio.

Multiplicatis namque extremis $a-e$, b, atque mediis $b+c+d+e$, $a-b$ inter se mutuo *respective*, producta fiunt æqualia. Est enim $\overline{a-e} \times b = ab-eb$, & $\overline{b+c+d+e} \times \overline{a-b} = ab+ac+ad+ae-bb-bc-bd-be$ (a). Constat autem, esse $ac = bb$ (b), $ad = bc$, & $ae = bd$ (c); ac proinde tam $+ac-bb$, quam $+ad-bc$, nec non $+ae-bd = 0$, & ideo $ab+ac+ad+ae-bb-bc-bd-be = ab-be$, quod est etiam productum extremorum $a-e$, b, ut patet. Ergo erit $a-e \,.\, b+c+d+e = a-b \,.\, b$ (d). Itaque in omni progressione &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

In progressione Geometrica finita ut ipsius denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita maximus ejusdem terminus minimo imminutus ad omnes reliquos collective sumtos.

31 Ut si denominator progressionis Geometricæ descendentis $a.\ b.\ c.\ d.\ e$ fuerit m, erit $a-e \,.\, b+c+d+e = m-1 \,.\, 1$. Enimvero cum per hypothesim habeatur $\frac{a}{b} = m$, erit $a \,.\, b = m \,.\, 1$ (e), ac proinde $a-b \,.\, b = m-1 \,.\, 1$ (f). Ostensum est autem, esse $a-e \,.\, b+c+d+e = a-b \,.\, b$. Ergo erit etiam $a-e \,.\, b+c+d+e = m-1 \,.\, 1$ (g).

COROL-

(a) Synopsis Algeb. §. 55., & §. 60.
(b) §. 28.
(c) §. 26.
(d) Lib. I. §. 84
(e) Ibidem §. 9.
(f) Ibidem §. 135.
(g) Ibidem §. 78.

COROLLARIUM II.

In progressione dupla finita excessus maximi termini supra minimum adæquat summam omnium terminorum imminutam maximo, in progressione tripla excessus ille est duplus, in progressione quadrupla est triplus summæ omnium imminutæ maximo termino, & sic deinceps.

32 Ut si habeatur progressio descendens in ratione dupla $a.\ b.\ c.\ d.\ e$ erit $a - e = \overline{b + c + d + e}$: si fuerit in ratione tripla, differentia $a - e$ erit dupla summæ $b + c + d + e$: si in ratione quadrupla, excessus $a - e$ erit triplus summæ $b + c + d + e$, atque ita deinceps. Patet ex præcedenti. Cum enim in primo casu denominator progressionis sit 2, in secundo 3, & in tertio 4, in primo erit $a - e.\ b + c + d + e = 2 - 1.\ 1$, in secundo $a - e.\ b + c + d + e = 3 - 1.\ 1$, & in tertio $a - e.\ b + c + d + e = 4 - 1.\ 1$. Est autem $2 - 1 = 1, 3 - 1 = 2, 4 - 1 = 3$. Ergo &c.

THEOREMA VIII.

Si excessus maximi termini supra minimum in progressione Geometrica finita dividatur per ipsius progressionis denominatorem unitate mulctatum, quotiens erit omnium summa maximo termino imminuta.

33 Esto progressio Geometrica descendens $a.\ b.\ c.\ d.\ e$, cujus denominator sit m. Dico, esse $\frac{a - e}{m - 1} = b + c + d + e$.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{a - e}{m - 1} = y$. Erit ergo $\overline{my - y} = \overline{a - e}$ (a); ac proinde $a - e.\ y = \overline{m - 1}.\ 1$ (b), cum sit $a - e \times 1 = a - e$, & $y \times \overline{m - 1} = \overline{my - y}$.

(a) Lib. I. §. 11. (b) Ibidem §. 14.

$= my - y$. Manifestum est autem, esse $\overline{a-e}.\overline{b+c+d+e} = \overline{m-1}.1$ (a). Ergo erit etiam $\overline{a-e}.\overline{b+c+d+e} = \overline{a-e}.y$ (b); atque adeo $y = b+c+d+e$ (c), sive $\frac{a-e}{m-1} = b+c+d+e$. Itaque si excessus &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Summa omnium terminorum progressionis Geometricæ finitæ imminuta maximo termino, ducta in illius denominatorem unitate mulctatum, efficit productum æquale maximo ejusdem termino minimo diminuto.

34 Nimirum iisdem positis, erit $\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1} = a-e$. Id enim ex eo manifeste sequitur, quod sit $\frac{a-e}{m-1} = b+c+d+e$.

COROLLARIUM II.

Si excessus maximi termini supra minimum in progressione Geometrica finita dividatur per summam omnium terminorum maximo diminutam, quotus erit denominator ipsius progressionis unitate mulctatus.

35 Videlicet, iisdem positis, erit $\frac{a-e}{b+c+d+e} = m-1$. Cum enim sit $\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1} = a-e$ (d), quemadmodum est $\frac{\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1}}{b+c+d+e} = m-1$ (e), erit quoque $\frac{a-e}{b+c+d+e} = m-1$ (f).

THEO-

(a) §. 31.
(b) Lib. I. §. 78.
(c) Ibidem §. 112.
(d) §. 34.
(e) Synop. Algeb. §. 67.
(f) Lib. I. §. 81.

THEOREMA IX.

In omni progressione Geometrica finita ut duorum maximorum terminorum differentia ad maximum terminum, ita excessus maximi supra minimum ad omnium summam mulctatam minimo.

36 Esto progressio Geometrica descendens $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ Dico, esse $a-e.\ a+b+c+d = a-b.\ a.$

Demonstratio.

Cum enim sit $\overline{a+b+c+d} \times \overline{a-b} = aa+ab+ac+ad-ba-bb-bc-bd$ (a), & $+ab-ab=o$, $ac=bb$ (b), $ad=bc$ (c), adeoque $+ac-bb=o$, sicuti etiam $+ad-bc=o$, facta reductione, erit $aa+ab+ac+ad-ba-bb-bc-bd=aa-bd$. Est autem $ae=bd$ (d). Ergo erit $aa-ae=aa-bd$ (e). Constat autem, $aa-ae$ esse productum extremorum $a-e,\ a$, & $aa-bd$ productum mediorum $a+b+c+d,\ a-b$. Igitur productum extremorum equabit productum mediorum, eritque $a-e.\ a+b+c+d=a-b.\ a$ (f). In omni ergo progressione &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

In omni progressione Geometrica finita ut denominator unitate mulctatus ad seipsum integrum, ita excessus maximi supra minimum ad omnium summam imminutam minimo.

37 Ut si denominator progressionis descendentis $a.\ b.\ c.\ d.\ e$ fuerit m, erit $a-e.\ a+b+c+d = m-1.\ m.$ Cum enim sit per hypo-

(a) Synop. Algeb. §. 54.
(b) §. 21.
(c) §. 25.
(d) §. 26.
(e) Synop. Algeb. §. 266.
(f) Lib. I. §. 84.

hypothesim $\frac{a}{b} = m$, erit $a . b = m . 1$ (a); ac proinde $\overline{a-b} . a = \overline{m-1} . m$ (b). Est autem $\overline{a-e} . \overline{a+b+c+d} = \overline{a-b} . a$ (c). Ergo erit quoque $\overline{a-e} . \overline{a+b+c+d} = \overline{m-1} . m$ (d).

COROLLARIUM II.

In omni progressione Geometrica finita ut est ipsius denominator ad seipsum unitate mulctatum, ita summa omnium terminorum minimo diminuta ad excessum maximi supra minimum.

38 Videlicet, iisdem positis, erit $\overline{a+b+c+d} . \overline{a-e} = m . \overline{m-1}$. Etenim cum jam sit $\overline{a-e} . \overline{a+b+c+d} = \overline{m-1} . m$, erit etiam $\overline{a+b+c+d} . \overline{a-e} = m . \overline{m-1}$ (e).

COROLLARIUM III.

Si summa omnium terminorum progressionis Geometricæ finitæ, minimo termino diminuta, per illius denominatorem unitate mulctatum multiplicetur, & productum per eundem integrum dividatur, quotus erit maximus ejusdem terminus mulctatus minimo.

39 Nimirum, iisdem positis, erit $\frac{\overline{a+b+c+d} \times \overline{m-1}}{m} = a - e$. Quandoquidem cum sit $\overline{a-e} . \overline{a+b+c+d} = \overline{m-1} . m$ (f), erit $\overline{a-e} \times m = \overline{a+b+c+d} \times \overline{m-1}$ (g). atque adeo

(a) Lib. I. §. 9.
(b) Ibidem §. 141.
(c) §. 36.
(d) Lib. I. §. 78.
(e) Lib. I. §. 121.
(f) §. 37.
(g) Lib. I. §. 82.

$$\frac{\overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}}{m} = \frac{\overline{a-e}\times m}{m}$$ (a). Manifestum est autem, esse $\frac{\overline{a-e}\times m}{m} = a-e$ (b). Ergo erit etiam $\frac{\overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}}{m}$ $= a-e$ (c).

COROLLARIUM IV.

Si in progressione Geometrica finita excessus maximi termini supra minimum multiplicetur per ipsius denominatorem, & productum per eundem denominatorem unitate mulctatum dividatur, quotus erit summa totius progressionis minimo termino imminuta.

40 Etenim, iisdem positis, cum sit $\overline{a-e}\times m = \overline{a+b+c+d}$ $\times\overline{m-1}$, & $\frac{\overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}}{m-1} = a+b+c+d$ (d), erit etiam $\frac{am-em}{m-1} = a+b+c+d$ (e).

PROBLEMA VII.

Dato primo termino progressionis Geometricæ constituendæ, ejusque denominatore, progressionem ipsam constituere.

I.

41 Constituere oporteat progressionem Geometricam ascenden-

(a) Lib. I. §. 81.
(b) Synopsis Algeb. §. 72.
(c) Lib. I. §. 81.
(d) Synopsis Algeb. §. 72.
(e) Lib. I. §. 81.

scendentem, cujus primus terminus sit a, & denominator m.

Resolutio.

Terminus a multiplicetur per denominatorem m, & fiat productum am. Hujusmodi productum ducatur itidem in m, & fiat am^2, atque ita deinceps. Series factorum a. am. am^2. am^3. am^4. am^5. am^6. &c. erit progressio Geometrica quaesita.

Demonstratio.

Cum enim sit $\frac{am}{a} = \frac{am^2}{am} = m$ (a), erit am^2. $am = am$. a (b), & invertendo, a. $am = am$. am^2. (c), eandemque ob caussam erit quoque am. $am^2 = am^2$. am^3, atque ita deinceps. Ergo &c.

II.

42. Constituenda modo sit progressio Geometrica descendens, cujus primus terminus sit a, denominator m.

Resolutio.

Terminus a dividatur per denominatorem m, & quotus $\frac{a}{m}$ iterum per m, & sic deinceps. Series quotientium a. $\frac{a}{m}$. $\frac{a}{m^2}$. $\frac{a}{m^3}$. $\frac{a}{m^4}$. $\frac{a}{m^5}$ &c. erit progressio descendens quaesita.

(a) Synopsis Algeb. §. 72.
(b) Lib. I. §. 44.
(c) Ibidem. §. 121.

Demonstratio.

Enimvero cum sit $\frac{a \times a}{m^2} = \frac{a}{m} \times \frac{a}{m} = \frac{aa}{m^2}$, erit quoque $a . \frac{a}{m} ∷ \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2}$ (a), & eadem ratione erit etiam $\frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} ∷ \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3}$, & sic deinceps. Igitur &c.

COROLLARIUM I.

43 Eodem modo continuabitur data quævis progressio Geometrica tam *ascendens*, quam *descendens*, quousque libuerit.

COROLLARIUM II.

44 *Quivis terminus progressionis Geometricæ ascendentis est factum ex ductu primi termini in eam denominatoris potestatem, cujus exponens est numerus terminorum præcedentium. Quivis autem terminus progressionis Geometricæ descendentis est quotus primi termini divisi per illam denominatoris potestatem, cujus exponens est numerus terminorum, qui datum ipsum terminum præcedunt.* Patet ex formula, qua utraque progressio exprimitur.

PROBLEMA VIII.

Datis primo termino progressionis, ejusque denominatore, terminum quemcunque invenire.

I.

45 Primus terminus progressionis ascendentis sit a, & denominator m. Invenire oporteat sextum ejusdem progressionis terminum.

(a) Lib. I §. 82.

Re-

Resolutio.

Quoniam quinque sunt termini, qui in ipsa progressione terminum quæsitum præcedunt, primus terminus a multiplicetur per quintam denominatoris m potestatem, scilicet per m^5. Erit am^5 terminus quæsitus.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 44.

II.

46 Primus terminus progressionis descendentis sit a, & denominator m. Invenire oporteat sextum terminum ipsius progressionis.

Resolutio.

Terminus a dividatur per quintam potestatem denominatoris m, videlicet per m^5. Fractio $\frac{a}{m^5}$ erit terminus quęsitus.

Demonstratio.

Patet ex eodem §. 44.

PROBLEMA IX.

Data summa progressionis Geometricæ finitæ, ejusque denominatore, & minimo termino, invenire maximum.

47 Summa datæ progressionis sit a, denominator m, & minimus terminus y. Invenire oporteat terminum ejusdem maximum.

Resolutio.

Summæ a dematur minimus y, & residuum $a-y$ multiplicetur per denominatorem m unitate mulctatum, scilicet per $m-1$. Factum vero $am-my-a+y$ dividatur per integrum denominatorem m, & *quoto* adiiciatur terminus minimus y.

Erit $\frac{am-my-a+y}{m}+y$ maximus terminus quæsitus.

Demonstratio.

Est enim *quotus* $\frac{am-my-a+y}{m}$ excessus maximi termini datæ progressionis supra terminum ejusdem minimum (a). Ergo &c.

PROBLEMA X.

Datis denominatore progressionis Geometricæ finitæ, ejusque summa, & maximo termino, invenire minimum.

48 Summa datæ progressionis sit x, maximus terminus a, & denominator m. Invenire terminum ejusdem minimum.

Resolutio.

Summa x maximo termino a diminuta, scilicet $x-a$, multiplicetur per $m-1$, denominatorem unitate mulctatum, & productum $mx-ma-x+a$ subducatur termino maximo a. Erit $a-mx+ma+x-a$ minimus terminus quæsitus.

Demonstratio.

Quippe productum $mx-ma-x+a$ deficit a maximo termino a toto valore minimi termini ipsius progressionis (b). Ergo &c,

PRO.

(a) §. 39. (b) §. 34.

PROBLEMA XI.

Datis extremis terminis progressionis Geometricæ finitæ, ejusque summa, denominatorem invenire.

49 Invenire oporteat denominatorem progressionis Geometricæ finitæ, cujus summa sit x, maximus terminus a, & minimus y.

Resolutio.

Differentia $a-y$ maximi termini a a minimo y dividatur per summam totius progressionis maximo termino imminutam, scilicet per $x-a$. Quotus $\frac{a-y}{x-a}$ unitate auctus, nempe $\frac{a-y}{x-a}+1$, erit denominator quæsitus.

Demonstratio.

Est enim *quotus* $\frac{a-y}{x-a}$ denominator datæ progressionis unitate mulctatus (a).

PROBLEMA XII.

Datis maximo, & minimo termino progressionis Geometricæ finitæ, ejusque denominatore, summam totius progressionis invenire.

50 Invenire oporteat summam progresſionis Geometricæ finitæ, cujus maximus terminus sit a, minimus y, & denominator m.

Resolutio I.

Excessus maximi termini a supra minimum y dividatur per

(a) §. 35.

per denominatorem m unitate mulctatum, & *quoto* adiicia-tur maximus terminus a. Erit $\frac{a-y}{m-1}+a$ summa quæsita.

Demonstratio.

Quotus namq; $\frac{a-y}{m-1}$ est summa totius progressionis maximo termino imminuta (a)

Resolutio II.

Terminorum differentia $a-y$ multiplicetur per denominatorem m, & factum $am-ym$ per eundem unitate mulctatum dividatur. *Quoto* hujusce divisionis $\frac{am-ym}{m-1}$ adiiciatur minimus terminus y. Aggregatum hujusmodi erit summa totius progressionis quæsita.

Demonstratio.

Etenim *quotus* $\frac{am-ym}{m-1}$ est summa totius progressionis mulctata minimo ejusdem termino y (b).

SYMPTOMATA

Progressionis Geometricæ infinitæ.

DEFINITIO VI.

51 *Particula infinitesima, seu infinite parva, dicitur illa, quæ omni*

(a) § 33. (b) §. 40,

omni assignabili quantitate minor est, atque adeo illi plane incomparabilis.

COROLLARIUM.

52 Hinc *particula infinite parva, si ad illam quantitatem, cui subtrahitur, referatur, pro nihilo haberi potest.* Cum enim sit minor omni quantitate assignabili, ad nihilum adeo accedit, ut pro nihilo in calculo considerari queat.

Axioma fundamentale.

In progressione Geometrica in infinitum descendente devenitur ad terminum adeo exiguum, ut penitus evanescat, & fiat zero aequalis.

53 Devenitur enim ad terminum infinite parvum.

COROLLARIUM.

54 Igitur *excessus maximi termini in progressione Geometrica in infinitum descendente, sicuti etiam excessus summae totius progressionis supra terminum ejusdem minimum, diversus non est ab ipso termino maximo, neque a tota ejusdem progressionis summa.* Ut si maximus terminus progressionis Geometricae in infinitum descendentis fuerit a, minimus terminus y, & summa totius progressionis x, erit $a-y=a, x-y=x$. Cum enim sit $y=0$ (a), erit $a-y=a-0$, $x-y=x-0$. Est autem $a-0=a$, & $x-0=x$. Ergo erit quoque $a-y=a$, $x-y=x$.

SCHOLION.

55 Quemadmodum in progressione Geometrica in infinitum descendente devenitur ad terminum infinite parvum, ita contraria ratione in progressione Geometrica in infinitum ascendente devenitur ad terminum infinite magnum. In hac enim progressione termini continuo augentur, sicuti e contrario in illa continuo minores fiunt. Et hinc est, summam progressionis Geometricę in infinitum ascendentis nullatenus exhiberi posse.

(a) §. 53.

THEOREMA X.

In progressione Geometrica in infinitum descendente ut excessus maximi termini supra terminum proxime minorem, ad ipsum proxime minorem ita maximus ad omnes simul reliquos collective sumtos.

56 Esto progressio Geometrica in infinitum descendens $a.b.c.d........y$. Dico, esse $a.\ b+c+d.....+y = a-b.b$.

Demonstratio.

Cum enim jam habeatur $a-y.b+c+d....+y = a-b.b$ (a), sitque $a-y = a$ (b), erit quoque $a.b+c+d.... +y = a-b.b$.(c) Igitur in progressione &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

In progressione Geometrica in infinitum decrescente ut ipsius denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita maximus progressionis terminus ad omnes simul reliquos.

57 Ut si quantitas m fuerit denominator progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis $a.\ b.\ c.\ d......y$, erit $a.b+c+d......+y = m-1.1$. Constat enim, esse $a.b = m.\ 1$ (d), adeoque $a-b.b = m-1.1$ (e). Est autem $a.b+c+d ....+y = a-b.b$. Ergo erit etiam $a.b+c+d ......+y = m-1.1$ (f).

COROLLARIUM II.

In progressione Geometrica in infinitum decrescente in ratione dupla maximus terminus adæquat summam omnium reliquorum. Si decrescat in ratione tripla, maximus terminus est duplus; si in ratione quadrupla, est triplus summæ reliquorum, atque ita deinceps.

58 Patet ex præcedenti. Videatur §.32.

THEO-

(a) §. 30.
(b) §. 54.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) Lib. I. §. 9.
(e) Ibidem §. 115.
(f) Ibidem §. 78.

THEOREMA XI.

Si maximus terminus progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis per ipsius denominatorem unitate mulctatum dividatur, quotus erit summa totius progressionis maximo termino diminuta.

59 Esto progressio Geometrica in infinitum decrescens $a. b. c. d \ldots\ldots y$, cujus denominator sit m. Dico, esse $\frac{a}{m-1} = b+c+d \ldots\ldots + y$.

Demonstratio.

Enimvero cum sit $\frac{a-y}{m-1} = b+c+d \ldots\ldots\ldots\ldots + y$ (a), & $a - y = a$ (b), erit quoque $\frac{a}{m-1} = b+c+d \ldots\ldots + y$. Itaque si maximus terminus &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Summa progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis maximo ipsius termino diminuta, si per denominatorem unitate mulctatum multiplicetur, maximus ejusdem terminus efficitur.

60 Etenim iisdem positis, cum sit $\frac{a}{m-1} = b+c+d \ldots\ldots + y$, erit quoque $\overline{b+c+d \ldots\ldots + y} \times \overline{m-1} = a$ (c).

(a) §. 33. (b) §. 54. (c) Lib. I. § 11.

COROLLARIUM II.

Si maximus terminus progressionis Geometricę in infinitum descendentis dividatur per summam totius progressionis maximo termino diminutam, quotus est denominator totius progressionis unitate mulctatus.

61 Quandoquidem cum habeatur $\overline{b+c+d\ldots\ldots\ldots+y}\times \overline{m-1} = a$, ficuti divifo primo membro hujus æquationis per $b+c+d\ldots\ldots+y$, quotus eft $m-1$ (a), ita is ipfe erit *quotus* alterius membri per eandem fummam divifi (b).

THEOREMA XII.

In progressione Geometrica in infinitum descendente ut duorum maximorum terminorum differentia ad maximum terminum, ita maximus terminus ad omnium summam.

62 Efto progreffio Geometrica in infinitum defcendens. $a.b.c.d\ldots\ldots y$. Dico, effe $a.a+b+c+d\ldots\ldots+y = a-b.a$

Demonstratio.

Cum enim fit $a-y = a$(c), erit $a-y.a+b+c+d\ldots.+y = a.a+b+c+d\ldots\ldots+y$(d). Eft autem $a-y\ .\ a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y = a-b.a$(e). Ergo erit quoque $a\ .\ a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y = a-b.a$ (f). Itaque in progreffione &c. quod erat oftendendum.

(a) Synop. Algeb. §. 67.
(b) Lib. I. §. 81.
(c) §. 54.
(d) Lib. 1. §. 102.
(e) §. 36.
(f) Lib. I. §. 77.

CO-

COROLLARIUM I.

In progressione Geometrica in infinitum descendente maximus terminus est media proportionalis inter differentiam duorum maximorum terminorum, & totam progressionis summam.

63 Etenim cum sit $a.\,a+b+c+d\ldots\ldots+y = a-b.\,a$, erit quoque $a-b.\,a = a.\,a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y$.

COROLLARIUM II.

Si quadratum maximi termini progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis dividatur per differentiam duorum terminorum maximorum, quotus erit summa totius progressionis.

64 Ut si summa progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis $a.b.c.d\ldots\ldots\ldots y$ fuerit x, erit $\frac{aa}{a-b} = x$. Habetur enim $a-b.\,a = a.\,x$ (a), adeoque $ax - bx = aa$ (b) Est autem $\frac{ax-bx}{a-b} = x$ (c). Ergo erit quoque $\frac{aa}{a-b} = x$ (d).

COROLLARIUM III.

In progressione Geometrica in infinitum decrescente ut denominator unitate mulctatus ad seipsum integrum, ita maximus progressionis terminus ad totam ejusdem summam.

65 Videlicet, iisdem positis, erit $a.\ a+b+c+d\ldots\ldots+y = m-1.\,m$. Etenim cum sit $a.b = m.1$ (e), erit $a-b.\ a = m-1.\,m$ (f). Ostensum est autem, esse $a.\ a+b+c+d\ldots\ldots+y = a-b.\ a$ (g). Ergo erit quoque $a.\,a+b+c+d\ldots\ldots+y = m-1.\ m$ (h).

De-

(a) §. 63.
(b) Lib. I. §. 83.
(c) Synop. Algeb. §. 72.
(d) Lib. I. §. 81.
(e) Ibidem §. 9.
(f) Ibidem §. 141.
(g) §. 63.
(h) Lib. I. §. 78.

COROLLARIUM IV.

Si summa progressionis Geometricæ in infinitum descendentis multiplicetur per illius denominatorem unitate mulctatum, & productum per ipsum denominatorem dividatur, quotus erit maximus ipsius terminus.

66 Etenim, stante analogia modo ostensa, erit $\overline{a+b+c+d \ldots\ldots +y} \times \overline{m-1} = a \times m$ (a) Est autem $\frac{a \times m}{m} = a$ (b). Ergo erit quoque $\frac{\overline{a+b+c+d \ldots\ldots +y} \times \overline{m-1}}{m} = a$ (c).

COROLLARIUM V.

Si in progressione Geometrica in infinitum descendente maximus terminus per progressionis denominatorem multiplicetur, & factum per eundem unitate mulctatum dividatur, quotus erit totius progressionis summa.

67 Videlicet, iisdem positis, cum sit $\overline{a+b+c+d \ldots +y} \times \overline{m-1} = a \times m$, nec non $\frac{\overline{a+b+c+d \ldots\ldots +y} \times \overline{m-1}}{m-1} = a+b+c+d \ldots\ldots +y$ (d), erit quoque $\frac{a \times m}{m-1} = a+b+c+d \ldots\ldots +y$ (e).

PRO-

(a) Lib. I. §. 82.
(b) Synopsis Algeb. §. 72.
(c) Lib. I. §. 81.
(d) Synop. Algeb §. 67.
(e) Lib. I. §. 81.

PROBLEMA XIII.

Datis maximo termino progressionis Geometricæ in infinitum decrescentis, ejusque denominatore, summam invenire.

68 Maximus terminus progressionis Geometricæ in infinitum descendentis sit a, ejusque denominator m. Summam totius progressionis invenire oporteat.

Resolutio I.

Terminus a dividatur per denominatorem m unitate mulctatum, & quoto $\frac{a}{m-1}$ maximus ipse terminus a adiiciatur. Erit $\frac{a}{m-1}+a$ summa totius progressionis quæsita

Demonstratio.

Est enim $\frac{a}{m-1}$ summa totius progressionis maximo termino diminuta (a).

Resolutio II.

Multiplicetur maximus terminus a per denominatorem m, & productum am dividatur per eundem denominatorem m unitate mulctatum. Erit $\frac{am}{m-1}$ summa totius progressionis.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 67.

PRO-

(a) §. 60.

PROBLEMA XIV.

Datis duobus primis terminis progressionis Geometricæ in infinitum descendentis, ejusdem summam invenire.

69 Determinare oporteat summam progressionis Geometricæ in infinitum descendentis, cujus primus terminus sit a, & secundus b.

Resolutio.

Quadratum aa primi termini a dividatur per $a-b$, excessum scilicet ejusdem a supra secundum b. Erit $\frac{aa}{a-b}$ summa quæsita.

Demonstratio.

Patet ex §. 64.

FINIS.